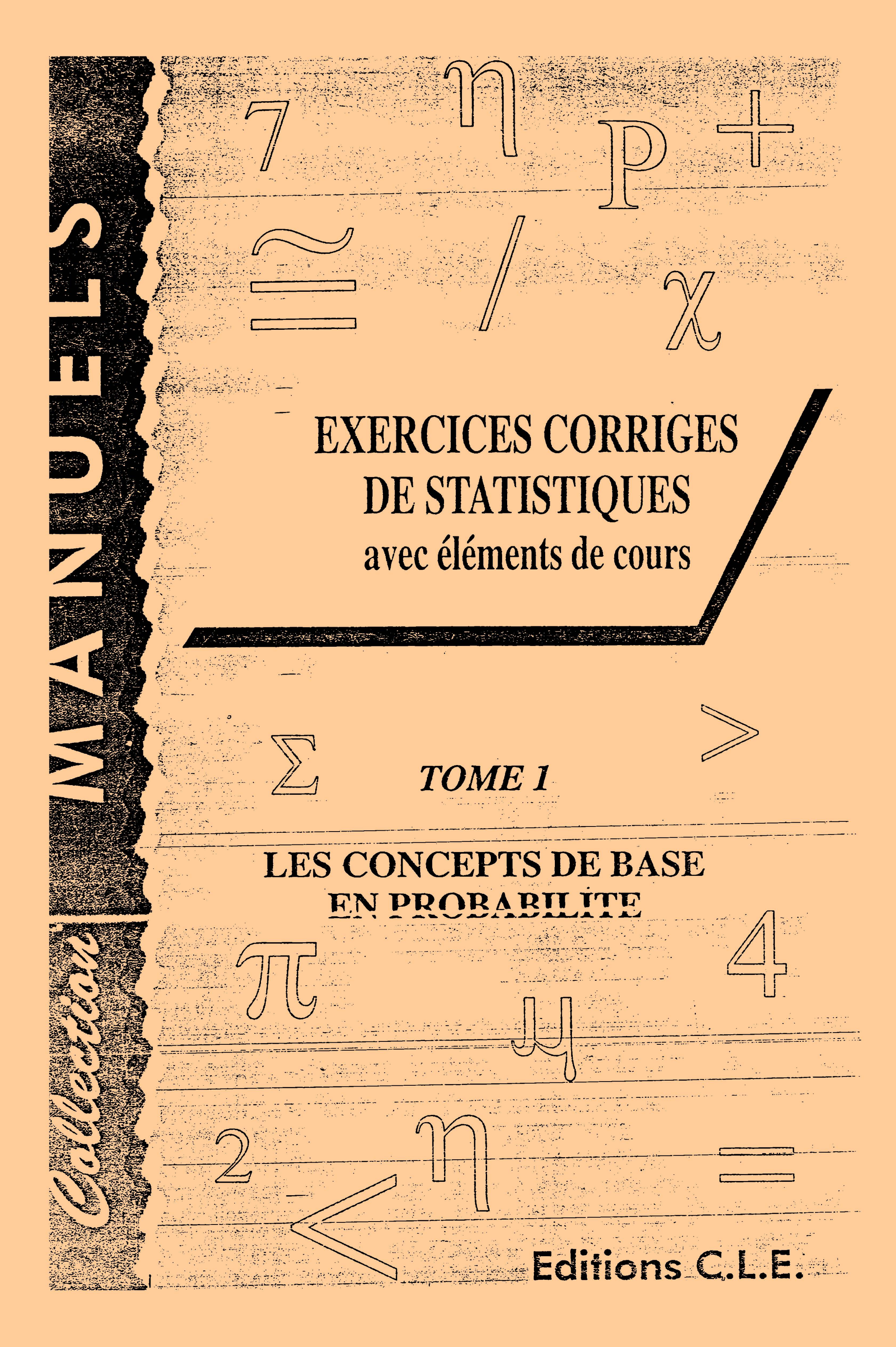

Collection MANUELS
EXERCICES CORRIGES DE STATISTIQUES
avec éléments de cours
TOME 1
LES CONCEPTS DE BASE EN PROBABILITE
Editions C.L.E.

Taoufik DJMAL
&
Abderrazek ELLOUZE

EXERCICES CORRIGES DE STATISTIQUES

avec éléments de cours

TOME I

LES CONCEPTS DE BASE EN PROBABILITE

EDITIONS C.L.E.

ISBN : 9973-744-70-5
"Exercice corrigés de statistiques
avec éléments de cours
Tome I
(les concepts essentiels de probabilité) "

Contributions à la Littérature d'Entreprise

96, Rue de Yougoslavie 1001 Tunis
Tél : 343 130 - Fax : 349 796
Prix de vente public : 7D500

AVANT PROPOS

Conformément à l'esprit de cette collection de ***MANUELS*** par laquelle les **Editions C.L.E.** enrichissent la bibliothèque universitaire, nous avons tenté par l'ouvrage que vous avez entre les mains de proposer au lecteur étudiant et ingénieur un outil hautement opérationnel.

Une large gamme d'exercices est précédée des éléments de cours indispensables.

Des propositions de solutions sont regroupées à la fin de chaque chapitre.

Ce travail est proposé en 3 tomes :

Le **tome 1** traite des problèmes de dénombrement. Il présente les notions fondamentales du calcul de probabilité et traite des variables aléatoires à une dimension discrètes et continues. Il constitue également une bonne initiation au calcul de probabilité.

Les lois de probabilités, discrètes et continues, uni et multidimensionnelles. feront l'objet des exercices proposées par le **tome 2** alors que le **tome 3** traite des problèmes d'échantillonnage, des problèmes de l'estimation ponctuelle et par intervalle de confiance, des tests paramétrique et non paramétrique.

Tels qu'ils sont, nous espérons que ces recueils d'exercices rendront service aux étudiants et aux autres catégories de lecteurs et qu'ils permetteront de mieux assimiler cette partie imposante des statistiques qu'est le calcul de probabilités.

Les auteurs

CHAPITRE I

ANALYSE COMBINATOIRE

INTRODUCTION

L'analyse combinatoire a pour but le dénombrement des différentes dispositions que l'on peut former à partir d'un ensemble d'éléments.

Un élément dans une disposition donnée est caractérisé par :

1°) Le nombre de fois où il figure.
2°) Sa place dans la disposition.

. Si un élément donné ne peut figurer dans une disposition donnée que 0 ou 1 fois, on dit que les dispositions sont **sans répétition.**

. Si un élément donné peut figurer plusieurs fois dans une disposition donnée, on dit que les dispositions sont **avec répétition**.

. Si deux dispositions comportant les mêmes éléments sont considérées comme identiques; les dispositions sont dites **non ordonnées**

. Si au contraire ces deux dispositions sont considérées comme différentes, on dit que les dispositions sont **ordonnées.**

SECTION I : LES DISPOSITIONS ORDONNEES

I.1 Permutation sans Répétition :

On appelle permutation sans répétition de n éléments d'un ensemble fini E : une **disposition ordonnée** de ces n éléments.

Dans chaque disposition, chacun des éléments figure dans un ordre déterminé une et une seule fois.

On démontre que ce nombre est égale à :

n (n - 1) (n - 2) 1

C'est-à-dire que pour le premier élément nous avons n choix; pour le 2ème élément (n - 1) choix etc....- Et on écrit :

$$P_n = n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\ldots\ldots 1 = n\,!$$

I . 2 : Permutation avec répétition

si dans l'ensemble E; il y a des éléments qui se répètent, nous parlons de permutations avec répétition.

Théorème : Le nombre de permutations de n objets dont n_1 sont semblables, n_2 sont semblables , ..., n_K sont semblables est :

$$P_R = \frac{n\,!}{n_1\,!\; n_2\,!\;\ldots\ldots\ldots\; n_K\,!}$$

I . 3 Arrangement sans répétition

Soit E un ensemble fini composé de n éléments . On appelle arrangement sans répétition de p éléments ($p < n$) choisis parmi les n éléments de E; toute disposition ordonnée de p éléments différents. Chaque élément ne pouvant figurer au maximum qu'une fois dans le même arrangement.

On note A_n^p le nombre d'arrangement de n éléments pris p à p et on démontre que $A_n^p = n\,(n-1)\,\ldots\ldots\ldots\,(n-p+1)$.

En effet; le premier élément d'un arrangement de p éléments pris dans un ensemble de n éléments peut être choisi de n façons différentes. Il y'a ensuite (n - 1) façons de choisir le deuxième élément de l'arrangement, et (n - 2) façons de choisir le troisième

élément. En continuant de cette façon ; on voit qu'il y'a (n - p + 1) façons différentes de choisir le $p^{ième}$ (ou le dernier) élément . Ainsi

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)..........(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Dans le cas particulier où p = n ; on a :

$$A_n^n = \frac{n!}{0!} = n! = P_n$$

Par convention 0 ! = 1 .

I . 4 : Arrangement avec Répétition :

Si dans le même arrangement; on permet à certains éléments d'apparaître plus qu'une fois voire p fois . on parle d'arrangement avec répétition.

Le nombre d'arrangements avec répétition de p éléments choisis à partir d'un ensemble de n éléments est égal à :

$$A_n^p = n^p$$

SECTION II : LES DISPOSITIONS NON-ORDONNEES :

Il s'agit d'une opération analogue à l'arrangement, mais cette fois, 2 dispositions comportant les mêmes éléments sont considérées comme identiques quelque soit les places occupées par ces éléments. La combinaison est une disposition non-ordonnée.

II . 1 Combinaison sans répétition :

Une combinaison de p éléments choisis parmi n, est une disposition **non ordonnée** de ces p éléments où chacun figure au plus 1 fois.

Le nombre de combinaisons de p éléments choisis parmi n est donné par :

$$C_n^P = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

a) Propriété de Combinaison :

1°) $C_n^P = C_n^{n-p}$

2°) $C_n^P = C_{n-1}^P + C_{n-1}^{P-1}$

3°) $C_n^P = C_{n-1}^{P-1} + C_{n-2}^{P-1} + \dots\dots\dots + C_{P-1}^{P-1}$

4°) $C_n^P = \frac{A_n^P}{P_n}$

5°) $\sum_{p=0}^{n} C_{n'}^P C_{n''}^{n-P} = C_{n'+n''}^n$

6°) $\sum_{p=0}^{n} (C_n^P)^2 = \sum_{p=0}^{n} C_n^P C_n^{n-p} = C_{2n}^n$

b) Binôme de Newton :

Le binôme de Newton donne l'expression générale du développement de $(a+b)^n$

Nous avons :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^P a^{n-p} b^P$$

$$= a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 \dots\dots\dots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

$$= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \dots\dots\dots + nab^{n-1} + b^n$$

II.2 combinaison avec repetition :

Si nous permettons dans les dispositions définies ci-dessus à certains éléments d'apparaître plus qu'une fois; nous parlons d'une combinaison avec répétition

La formule générale est :

$$K_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

Nous résumons dans le tableau ci-dessous les principales formules concernant l'analyse combinatoire.

	Sans Répétition	**Avec Répétition**
Permutation	$P_n = n!$	$P_R = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}$
Arrangement	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	$A_n^p = n^p$
Combinaison	$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$	$K_n^p = C_{n+p-1}^p$

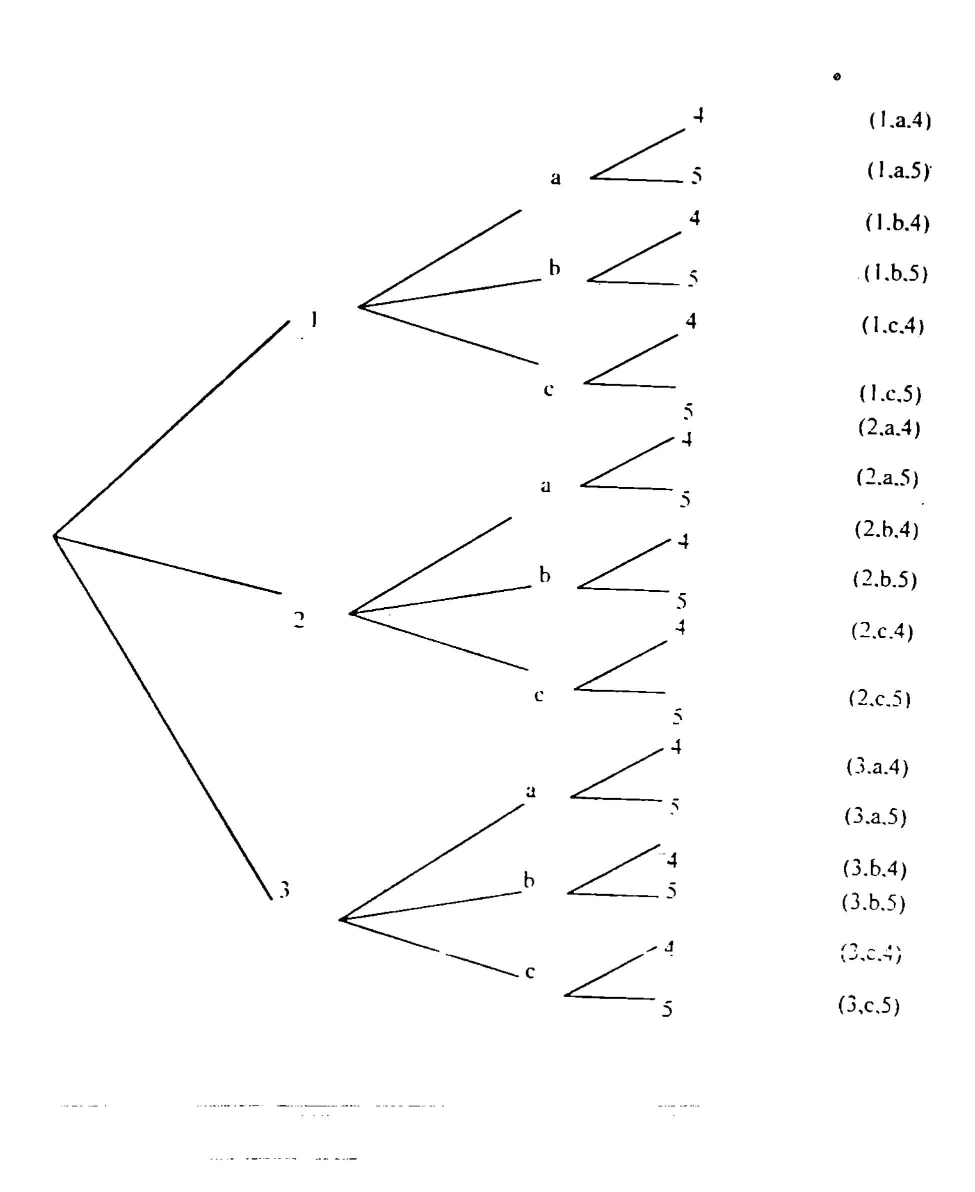
SECTION III : DIAGRAMME ARBORESCENT :

Un diagramme en arbre est un moyen commode de dénombrer tous les résultats possibles d'une suite d'expériences dont chacune peut avoir lieu un nombre fini de fois.

Exemple :

Construire le diagramme en arbre du produit A x B x C où

A = { 1,2,3 } ; B = { a,b,c } et C = {4,5 }.


1
2
3
a
b
c
a
b
c
a
b
c
4
5
4
5
4
5
4
5
4
5
4
5
4
5
4
5
4
5
(1.a.4)
(1.a.5)
(1.b.4)
(1.b.5)
(1.c.4)
(1.c.5)
(2.a.4)
(2.a.5)
(2.b.4)
(2.b.5)
(2.c.4)
(2.c.5)
(3.a.4)
(3.a.5)
(3.b.4)
(3.b.5)
(3.c.4)
(3.c.5)

EXERCICES

I.1 :

Une commission de 5 membres comprenant 3 économistes et 2 gestionnaires doit être constituée à partir de 15 candidats se divisant en 8 économistes et 7 gestionnaires.

a) De combien de façons différentes cette commission peut-elle être constituée?

b) Même question ; en supposant qu'un économiste nommément désigné parmi les 8 économistes devant absolument faire partie de la commission.

c) Même question ; en supposant que deux gestionnaires refusent d'en faire partie.

d) Même question : en supposant que l'économiste X et le gestionnaire Y refusent de siéger ensemble.

I.2 :

Un quartier comprend 5 médecins privés. On demande à chacun des cinq médecins quel jour hébdomadaire de fermeture lui conviendrait.

a) De combien de façons différentes peuvent à priori s'énoncer les choix des 5 médecins ?

b) Les cinq jours de fermeture devant être différents. Déterminer le nombre de façons différentes d'énoncer les choix possibles.

c) On s'aperçoit qu'aucun médecin n'entend fermer le lundi; ni le mardi ; quel est le nombre de choix différents ?

I.3 :

On dispose d'un jeu de 32 cartes et on considère toutes les donnes de 8 cartes différentes.

a) Déterminer le nombre de donnes possibles.

b) Déterminer le nombre de donnes comprenant 2 cartes de chaque couleur

c) Déterminer le nombre de donnes comprenant un roi.

d) Déterminer le nombre de donnes ne comprenant aucun as.

e) Déterminer le nombre de donnes comprenant au moins un valet.

I.4 :

Un représentant commercial doit. au cour d'une tournée, visiter 10 magasins.

a) S'il se trouve quinze magasins dans l'aire géographique à laquelle il s'intéresse; de combien de manières différentes lui est-il possible de choisir un groupe de 10 magasins ?

b) Toujours dans la même hypothèse de 15 magasins situés dans cette zone géographique, mais en supposant, en outre, que l'ordre dans lequel il visitera les 10 magasins choisis présente de l'importance, combien d'itinéraires différents peut-on sélectionner ?

c) En supposant que les 10 magasins à visiter aient été choisis, mais pas encore l'itinéraire qui leur est dévolu. De combien de manière peut se dérouler la visite de 10 magasins.

I.5 :

On dispose de sept chiffres : 1,2,3,4,5,6 et 7.

a) Combien de nombres de 4 chiffres différents peut-on former à partir de cet ensemble?

b) Combien de ces nombres sont inférieurs à 5000 ?

c) Combien sont-t-ils pairs?.

d) Combien sont-t-ils des multiples de 5?

e) Combien de nombres de 5 chiffres peut-on former à partir de cet ensemble?

f) Combien de ces nombres sont-t-ils supérieurs à 50000 ?

I.6 :

Dans une classe de 50 garçons et 30 filles; combien y-a-t-il de façons différentes de choisir des groupes de 5 personnes:

a) Comprenant une seule fille?

b) Comprenant au moins une fille?

c) Dont le président soit un garçon et la secrétaire une fille?

d) Dont le président soit un garçon?

e)Dont le président soit un garçon et comprenant au moins une fille?

• **I.7 :**

Sur 20 personnes ,10 lisent la revue A; 8 lisent la revue B et 3 lisent les 2 revues. De combien de façons différentes peut-on choisir 5 personnes parmi les 20 si :

a) Chacune des 5 personnes lit au moins une revue?

b) Chacune des 5 personnes lit une et une seule revue?

c) Les cinq personnes lisent une seule et même revue.

d) Trois d'entre elles lisent la revue A seulement; les deux autres lisent la revue B.

e) Deux d'entre elles lisent une revue A; les trois autres lisent la revue B; chacune d'entre elles ne lisant qu'une seule revue.

f) Trois d'entre elles au moins lisant la revue $\bar{A}$.

I.8 :

Un groupe d'étudiants de 15 garçons et 15 filles passent un examen oral, un seul à la fois, et l'un après l'autre.

a) Quel est le nombre de listes possibles ?

b) Si l'examinateur décide de commencer par un garçon ; déterminer le nombre de listes possibles .?

c) Quel est le nombre de listes possibles si l'examinateur décide que les deux premiers étudiants examinés soient un garçon et une fille ?

d) Si les étudiants sont examinés alternativement en commençant par une fille ; quel nombre de listes pourrait-on avoir ?

I.9 :

Les 7 membres qui constituent le comité des représentants des ouvriers d'une entreprise sont invités à s'assoir côte à côte à une table de banquet.

a) Déterminer le nombre de dispositions possibles pour ce comité.

b) Si on suppose qu' au lieu d'inviter les septs, on n'en invite que cinq ;quel sera le nombre de dispositions différentes dans ce groupe de représentants?

c) Quel est le nombre de groupes de 5 personnes différentes qu' on peut former ?

I . 10 :

Un atelier comprenant 25 ouvriers, 15 hommes et 10 femmes. On choisit dans cet atelier des équipes de 5 ouvriers

a) Combien d'équipes différentes peut-on former?

b) Combien d'équipes comprenant au moins 3 hommes peut-on former ?.

c) Combien d'équipes de 5 personnes de même sexe peut-on former?

I . 11 :

Un comité est composé de 5 hommes et 4 femmes. De combien de manières peut-on former un bureau composé d'un président, d'un vice président, d'une secrétaire et d'un trésorier, sachant que le président doit être un homme et la secrétaire une femme ?

I . 12 :

Le menu d'un restaurant comprend 10 hors-d'oeuvre; 4 entrées, 11 plats de viande ou poissons et 9 desserts ou fromages. Si un client a le droit pour un certain prix de commander un de chaque élément ; c'est-à-dire un hors d'oeuvre. 1 entrée, 1 plat et un fromage ou un dessert, combien peut on former de menus élémentaires distincts ?

I . 13 :

L'alphabet français comprend 26 lettres dont 6 sont des voyelles.

a) Combien peut on former théoriquement de mots de 6 lettres différentes en utilisant 4 consonnes et 2 voyelles ?

b) Combien de ces mots contiennent la lettre a ?

c) Combien de ces mots contiennent les lettres a et c?

d) Combien de ces mots commencent par a et contiennent par la lettre c ?

e) Combien de ces mots commencent par a et se terminent par la lettre c?

f) Combien de ces mots contiennent a,b.c et d ?

I . 14 :

a) Déterminer le nombre de mots de quatre lettres différentes que l'on peut former avec les lettres du mot PLACES

b) Combien de ces mots contiennent seulement des consonnes?

c) Combien de ces mots commencent et se terminent par une consonne?

d) Combien de ces mots commencent et se terminent par une voyelle?

e) Combien de ces mots contiennent la lettre L?

f) Combien de ces mots commencent par L et finissent par une voyelle?

g) Combien de ces mots commencent par L et contiennent la lettre a?

I . 15 :

a) Calculer le nombre de possibilités qu'il y'a d'assoir 10 garçons et 10 filles sur un banc ; sachant qu'il y'a alternativement un garçon et une fille. etc.

b) Calculer ce même nombre si les garçons et les filles se placent encore alternativement et si un garçon et une fille prédéterminés s'assoient l'un à côté de l'autre.

c) calculer ce même nombre sachant que les garçons et les filles se placent encore alternativement; mais qu'un garçon et une fille prédeterminés ne doivent pas s'assoir l'un à côté de l'autre.

d) calculer ce même nombre si les garçons s'assoient les uns à côté des autres et s'il en est de même pour les filles.

e) Calculer ce même nombre si seulement les filles s'assoient l'une à côté de l'autre.

I . 16 :

A l'oral d'un examen; un étudiant doit répondre à 9 questions sur 15.

a) Combien y'a t-il de choix possibles?

b) Combien y'a t-il de choix possibles s'il doit répondre obligatoirement aux 3 premières questions ?

c) Combien de choix y'a t-il s'il doit répondre au moins à 4 des 5 premières questions ?

d) Combien de choix possibles y'a t-il s'il doit répondre à 3 des 5 premières questions ; 3 des 5 deuxièmes questions ?

I . 17 :

On considère tous les entiers positifs de 4 chiffres différents (on suppose que 0 ne peut être le premier chiffre).

a) Combien de ces entiers sont supérieurs à 5763?

b) Combien sont impairs?

c) Combien sont divisibles par 5?

d) Combien sont pairs?

I . 18 :

Une réunion rassemble 4 Tunisiens ; 4 Algériens, 3 Marocains; 2 Libyens, 3 Mauritaniens.

1) Sachant que les personnes de même nationalité s'assoient les unes à côté des autres; de combien de façons peuvent-ils prendre place sur une rangée de 16 chaises.

2) Résoudre le même problème en supposant que les personnes s'assoient autour d'une table ronde.

I . 19 :

De combien de manières peut-on partager 16 jouets entre 5 enfants sachant que le plus jeune doit recevoir 4 jouets et les autres enfants 3 jouets?

I . 20 :

Combien de permutations distinctes peut-on former avec toutes les lettres des mots :

a) MISSISSIPPI
c) STATISTIQUES
b) SOCIOLOGIQUE
d) ETUDIANTE

I . 21:

a) Calculer le nombre de permutations distinctes que l'on peut former avec toutes les lettres du mot ETUDIANTES

b) Combien de ces permutations commencent et finissent par la même lettre?

c) Combien de ces permutations commencent par a et finissent par n?

I . 22 :

On a un lot de 10 pièces dont 7 sont bonnes et 3 sont défectueuses.

a) Quel est le nombre total d'échantillons sans remise de taille $n = 4$?

b) Quel est le nombre de ceux qui ne contiennent aucune pièce défectueuse ?

c) Quel est le nombre de ceux qui contiennent une pièce défectueuse?

d) Quel est le nombre de ceux qui contiennent au moins une pièce défectueuse?

I . 23 :

Dans une urne contenant 8 boules blanches ; 10 boules rouges et 7 boules vertes, on tire au hasard et sans remise 5 boules. Combien y'a t-il de façons différentes d'avoir parmi les 5 boules :

a) 2 boules blanches, 2 boules rouges et 1 boule verte?

b) au moins une boule rouge?

c) au plus une boule blanche?

d) Pas de boules vertes?

e) Pas de boules de couleur différente (c'est à dire avoir 5 boules de la même couleur)?

I . 24 :

Une société laitière fabrique des yaourts aux fruits avec 12 parfums différents. Le directeur des ventes propose de constituer des lots de 6 pots de parfums différents.

a) Combien de lots distincts peut-on former?

b) Combien de lots peut-on former sachant qu'ils ne doivent pas contenir simultanément un pot à la fraise et un pot à la framboise?

c) Combien de lots distincts peut-on former sachant que si un lot contient un pot au citron. il doit obligatoirement contenir un pot au cassis ?

d) combien de lots distincts peut-on former contenant un pot au citron; un pot à la pomme et un pot à la pêche?

I. 25 :

Montrer la relation suivante :

a) $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

En déduire que :

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-2}^{p-1} + \dots\dots\dots + C_p^{p-1} + C_{p-1}^{p-1}$$

I . 26 :

Montrer les relations suivantes :

a) $C_n^p = C_n^{n-p} = \frac{n}{p} C_{n-1}^{p-1}$

b) $nC_n^p = (p+1)C_n^{p+1} + pC_n^p = pC_{n+1}^{p+1} + C_n^{p+1}$

I . 27 :

Montrer que

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$$

I . 28 :

En se servant de la formule du binôme de Newton; calculer :

a) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots\dots\dots\dots + C_n^p + \dots\dots\dots + C_n^n$

b) $C_n^0 - C_n^1 + \dots\dots\dots\dots + (-1)^p C_n^p + \dots\dots\dots + (-1)^n C_n^n$

c) $C_n^0 - 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \dots\dots\dots + (-2)^p C_n^p + \dots\dots\dots + (-2)^n C_n^n$

I . 29 :

Calculer les sommes suivantes :

$S_0 = \sum_{y=0}^{n} C_n^y$; $S_1 = \sum_{y=1}^{n} y C_n^y$

$S_2 = \sum_{y=2}^{n} y(y-1) C_n^y$; $S_3 = \sum_{y=1}^{n} y^2 C_n^y$;

$S_4 = \sum_{y=1}^{n} y(y+1) C_n^y$; $S_5 = \sum_{y=0}^{n} (y^2+1) C_n^y$

I . 30 :

Résoudre dans N les équations suivantes :

a) $C_n^3 - C_n^2 = \frac{n^3 - 6n^2}{6} + 5$; b) $\frac{C_3^5}{C_n^4} = 17$;

c) $A_n^2 = 90$; d) $A_n^3 = 120$;

e) $A_n^4 = 6A_n^3$; f) $2A_n^2 + 50 = A_{2n}^2$;

SOLUTIONS PROPOSEES

I . 1 :

a) $C_8^3.C_7^2 = 1176$ Commissions différentes de 5 personnes comprenant 3 économistes et 2 gestionnaires.

b) $C_1^1 C_7^2 C_7^2 = 441$ commissions différentes si un économiste désigné devant faire partie de la commission.

c) $C_8^3 C_5^2 = 560$ commissions différentes.

d) 1ère méthode :

Il s'agit du nombre total de commissions moins le nombre de commissions où X et Y font partie de la commission :

$1176 - C_7^2.C_6^1 = 1050$ commissions différentes.

2ème méthode :

$$\underbrace{C_7^2.C_6^2}_{\text{X mais non Y}} + \underbrace{C_7^3 C_6^1}_{\text{Y mais non X}} + \underbrace{C_7^3.C_6^2}_{\text{ni X ni Y}}$$

= 1050 commissions différentes.

I . 2 :

n = 7 jours et p = 5 jours.

a) $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^5 = 16807 = n^p$: Il s'agit du nombre d'arrangements de 5 éléments (avec répétition) choisis parmi 7.

b) $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520 = A_7^5$: Il s'agit du nombre d'arrangements de 5 éléments parmi 7 sans répétition.

c) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 = A_5^5 = 5!$: Il s'agit du nombre d'arrangements (sans répétition) de 5 éléments choisis parmi 5.

I . 3 :

a) $C_{32}^8 = \dfrac{32\,!}{8\,!24\,!} = 10.518.300$ donnes possibles de 8 cartes

b) $C_8^2.C_8^2.C_8^2.C_8^2 = 28^4 = 614.656$ donnes possibles

c) $C_4^1 x C_{28}^7$ = 4.736.160 donnes possibles

d) C_{28}^8 = 3.108.105 donnes possibles

e) $C_{32}^8 - C_{28}^8 = C_4^1 C_{28}^7 + C_4^2 C_{28}^6 + C_4^3 C_{28}^5 + C_4^4 C_{28}^4$
= 7.410.195 donnes possibles

I.4 :

a) C_{15}^{10} = 3003 manières différentes de choisir un groupe de 10 magasins (l'ordre de choix ne présente aucune importance).

b) A_{15}^{10} = 360360 manières différentes de choisir un groupe de 10 magasins (l'ordre de choix présente une importance).

c) P_{10} = 10! = 3628800 manières différentes de dérouler la visite de 10 magasins.

I.5 :

a) A_7^4 = 840 nombres de 4 chiffres différents.

b) Ce sont les nombres qui commencent par 1,2,3, ou 4; donc nous avons 4 choix pour le premier chiffre du nombre ; pour le deuxième chiffre 6 choix, pour le troisième chiffre 5 choix et pour le quatrième chiffre 4 choix ; soit un total de : 4 x 6 x 5 x 4 = 480 nombres inférieurs à 5000.

c) Ce sont les nombres qui se terminent par 2,4 ou 6; donc 3 choix pour le dernier chiffre; 6 choix pour le premier, 5 choix pour le second et 4 choix pour le troisième chiffre :

6 x 5 x 4 x 3 = 360 nombres pairs

(N. B : Il y'a donc 840 - 360 = 480 nombres impaires, soit 6 x 5 x 4 x 4).

d) Ce sont les nombres qui se terminent par 5 ; soit 6 choix pour le 1er chiffre ; 5 choix pour le 2ème chiffre ; 4 choix pour le 3ème chiffre et 1 choix pour le dernier chiffre; c'est à dire un total de 6 x 5 x 4 x 1= 120 nombres multiples de 5.

e) Il s'agit d'arrangement avec répétition; donc un total de 7 x 7 x 7 x 7 x 7 = 7^5 = 16807 = nombres de 5 chiffres.

f) Ce sont les nombres qui commencent par 5 , 6 ou 7, soit un total de 3 x 7 x 7 x 7x 7 = 3×7^4 = 7203 nombres supérieurs à 50000

I . 6 :

a) $C_{50}^{4}.C_{30}^{1} = 6.909.000$ On choisit 4 garçons parmi 50 et une fille parmi les 30.

b)

$$C_{50}^{4}.C_{30}^{1} + C_{50}^{3}C_{30}^{2} + C_{50}^{2}C_{30}^{3} + C_{50}^{1}C_{30}^{4} + C_{50}^{0}C_{30}^{5} = C_{80}^{5} - C_{50}^{5}$$

= 17.131.016 choix possibles

c) $C_{50}^{1}.C_{30}^{1}.C_{78}^{3} = 114.114$ choix possibles.

d) $C_{50}^{1}C_{79}^{4} = 75.125.050$ choix possibles.

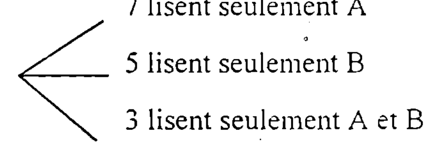
e) $C_{50}^{1}\left[C_{49}^{3}C_{30}^{1} + C_{49}^{2}C_{30}^{2} + C_{49}^{1}C_{30}^{3} + C_{49}^{0}C_{30}^{4}\right]$

$= C_{50}^{1}\left[C_{79}^{4} - C_{49}^{4}\right] = 64.531.250$ choix possibles.

I . 7 :

Il y'a 10 + 8 - 3 = 15 personnes qui lisent au moins

une revue dont :



a) $C_{15}^{5} = 3003$ groupes de 5 personnes qui lisent au moins une revue.

b) $C_{12}^{5} = 792$ groupes de 5 personnes qui lisent une seule revue.

c) $C_{7}^{5} + C_{5}^{5} = 22$ groupes.

d) $C_{7}^{3}C_{8}^{2} = 980$ groupes.

e) $C_{7}^{2}.C_{5}^{3} = 210$ groupes .

f) $C_{10}^{3}.C_{10}^{2} + C_{10}^{4}C_{10}^{1} + C_{10}^{5} = 7752$ groupes.

I . 8 :

$n_1 = n_2 = 15 \rightarrow n_1 + n_2 = 30$ étudiants.

a) Pn = P_{30} = 30 ! possibilités ; si on impose aucune condition sur l'ordre de passage des étudiants.

b) 15 x 29! : le premier examiné va être choisi parmi 15; le second parmi 29 ; le troisième parmi 28 et ainsi de suite.

c) 2 x 15 x 15 x 28 ! : Les 2 premiers sont : 1 garçon et 1 fille ou 1 garçon le troisième va être choisi parmi 28 ; le quatrième parmi 27 et ainsi de suite.

d) 15 x 15 x 14 x 14 x .... x 1 x 1 = 15! 15! possibilité si les étudiants sont examinés alternativement en commençant par une fille.

I . 9 : n = 7

a) $P_n = P_7 = 7! = 5040$ dispositions pour ce comité.

b) $A_7^5 = 2520$ dispositions pour un sous groupe de 5 personnes.

c) $C_7^5 = 21$ groupes possibles de 5 personnes choisis parmi 7.

I . 10 :

a) $C_{25}^5 = 53130$ équipes possibles de 5 ouvriers.

b) $C_{15}^3 C_{10}^2 + C_{15}^4 C_{10}^1 + C_{15}^5 = 31941$équipes comprenant au moins 3 hommes.

c) $C_{15}^5 + C_{10}^5 = 6258$ équipes de 5 personnes de même sexe.

I . 11 :

$C_5^1 C_4^1 C_7^2 = 420$: Le président va être choisi parmi les 5 hommes, la secrétaire parmi les 4 femmes et les 2 autres parmi les 7 restants.

I . 12 :

$C_{10}^1 . C_4^1 C_1^1 . C_9^1 = 3960$ menus élémentaires différents.

I . 13 :

$n = 26$ lettres ; $n_1 = 20$ consonnes et $n_2 = 6$ voyelles.

a) $C_{20}^4.C_6^2.6! = 52.326.000$: On choisit 4 consonnes parmi 20; 2 voyelles parmi 6; pour la 1ère lettre nous avons 6 choix possibles; pour la 2ème lettre nous avons 5 choix possibles etc.

b) $C_{20}^4 C_5^1.6! = 17.442.000$ mots possibles.

c) $C_{19}^3 C_5^1 6! = 3.488.400$ mots possibles.

d) $C_{19}^3 C_5^1 5! = 581.400$ mots possibles.

e) $C_{19}^3 C_5^1 4! = 1116.280$ mots possibles.

f) $C_{17}^1 C_5^1.6! = 61.200$ mots possibles.

I . 14 :

a) $A_6^4 = 6.5.4.3 = 360$ mots de quatre lettres.

b) $A_4^4 = P_4 = 4.3.2.1 = 24$ mots de quatre consonnes.

c) $4.4.3.3 = 144$ mots : Nous avons le choix entre 4 consonnes pour la 1ère lettre et 3 consonnes pour la dernière ; les lettres 2 et 3 vont être choisi parmi les 4 restantes : $C_4^1 A_4^2 C_3^1$

d) $C_2^1 A_4^2 C_1^1 = 2.4.3.1 = 24$ mots : Nous avons le choix entre 2 voyelles pour la première lettre, une voyelle pour la dernière, les lettres 2 et 3 vont être choisies parmi les 4 restantes.

e) $4A_5^3 = 4.5.4.3 = 240$ mots qui contiennent la lettre L : La lettre L peut être placée en 1ère, 2ème, 3éme ou 4ème position; et on choisit 3 lettres parmi les 5 restantes.

f) $1.A_4^2.2 = 4.3.2 = 24$ mots commencent par L et finissent par une voyelle.

g) $1.3.A_4^2$ mots qui commencent par L et contiennent la lettre a: Pour a nous avons 3 positions possibles, et on choisit 2 parmi les 4 lettres restantes.

I . 15:

a) 2 . 10! . 10! : On place un garçon et une fille ou une fille et un garçon, etc.

b) 2 . 19 . 9! 9! : Nous avons 19 possibilités pour placer ce couple.

c) 2. 10!. 10! - 2 . 19. 9! 9! : Il s'agit de la différence entre a) et b).

d) 2 . 10 ! 10! : 10 garçons et 10 filles ou 10 filles et 10 garçons.

e) 11.10!. 10! : On peut commencer à placer 0,1,2.... ou 10 garçons par la suite on place les filles (exemple $\underbrace{GG\ldots\ldots G}_{10}$ $\underbrace{FF\ldots\ldots F}_{10}$ ou $\underbrace{G}_{1}$ $\underbrace{FFF\ldots\ldots F}_{10}$ $\underbrace{GG\ldots\ldots G}_{9}$ ou $\underbrace{FF\ldots F}_{10}$ $\underbrace{GG\ldots\ldots G}_{10}$ ou $\underbrace{GG}_{2}$ $\underbrace{FF\ldots\ldots F}_{10}$ $\underbrace{GG\ldots\ldots G}_{8}$

I . 16 :

a) $C_{15}^{9} = 5005$ choix possibles pour les 9 questions

b) $C_{12}^{6} = 924$ choix possibles pour les 6 questions restantes.

c) $C_{5}^{4}.C_{10}^{5} + C_{10}^{4} = 462$ choix possibles pour les 4 ou 5 questions restantes.

d) $C_{5}^{3}.C_{5}^{3}.C_{5}^{3} = 1000$ choix possibles pour les 9 questions.

I . 17 :

a) 4 . 504 + 2 . 56 + 3 = 2131 : Pour les chiffres qui commençent avec 5 nous avons au début 5764 ; 5768 ; 5769 et nous avons aussi les nobmres dont le deuxième chiffre est le 8 ou le 9 (2 possibilités) ; dont le troisième chiffre va être choisi parmi 8 possibilités et le dernier chiffre parmi 7 .

Soit un total de : 3 +2 . 8 .7 = 115

Pour les nombres qui commencent avec 6 nous avons 9 possibilités pour le deuxième chiffre ; 8 pour le troisième chiffre et

7 pour le dernier. Ce même raisonnement s'applique pour les nombres qui commençent avec 7 ou 8 ou 9.

Soit un total de : 4 . 9 . 8 .7 = 2016.

b) 8. 8. 7. 5 = 2240 : Le premier chiffre va être choisi parmi 8 puisqu'il est différent de 0 et du dernier chiffre; le deuxième chiffre doit être différent du premier et du dernier chiffre ; le troisième est différent du premier, du second et du dernier chiffre, et le quatrième va être choisi parmi 5.

c) 9 . 8 . 7 . 1 + 8 . 8 . 7 . 1 = 952 le dernier chiffre peut être le 0 ou le 5.

d) $\underbrace{9.8.7.1}_{\text{dernier chiffre } 0} + \underbrace{8.8.7.1}_{\text{dernier chiffre } 2} + \underbrace{8.8.7.1}_{\text{dernier chiffre } 4} + \underbrace{8.8.7.1}_{\text{dernier chiffre } 6} + \underbrace{8.8.7.1}_{\text{dernier chiffre } 8} = 9.8.7.1 + 4.8.8.7.1 = 2296.$

I . 18 :

a) Il y a 5 ! façons de ranger les 5 nationalités sur une rangée de 16 chaises. Dans chaque cas les 4 Tunisiens peuvent se placer de 4! manières différentes,.........., les 3 Mauritaniens de 3! manières différentes; soit un total de :

5! 4! 4!. 2!. 3! = 4.976.640

b) Il y'a 4 ! façons de ranger les 5 nationalités sur un cercle. Donc :

4! 4! 4! 3! 2! 3! = 995.328

I . 19 :

On désire calculer le nombre de partitions de 16 jouets en 5 ensembles contenants respectivement 4,3,3,3 et 3 jouets. Donc il y'a :

$$\frac{16!}{4!3!3!3!} = 960,960,000$$ partition possbles.

I . 20 :

a) $\frac{11!}{4!4!2!1!} = 34.650$; b) $\frac{12!}{3!2!1!1!1!} = 39.916.800$

c) $\frac{12!}{3!3!2!1!1!} = 6.652.800$; d) $\frac{9!}{2!2!1!1!....1!} = 90.720$

I . 21 :

a) $\frac{10!}{2!2!1!1!....1!} = 907.200$

b) Il s'agit de ceux qui commencent et se terminent par E ou par T ; donc :

$$\frac{8!}{2!} + \frac{8!}{2!} = 40.320$$

c) $\frac{8!}{2!2!} = 10.080$

I . 22 :

n = 10 < 7 Bonnes / 3 Défectueuses

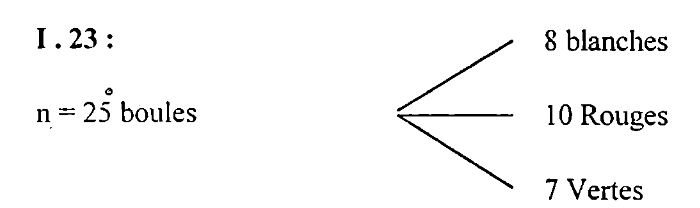
a) C_{10}^{4} = 210 échantillons possibles de 4 pièces.

b) C_{7}^{4} = 35 échantillons de 4 pièces non défectueuses.

c) $C_{7}^{3}.C_{3}^{1}$= 105 échantillons qui contiennent une pièce défectueuse

d) $C_7^3 \cdot C_3^1 + C_7^2 \; C_3^2 + C_7^1 \; C_3^3 = C_{10}^4 - C_7^4 = 185$ échantillons.

I . 23 :



a) $C_8^2 \cdot C_{10}^2 \cdot C_7^1 =$ 8820 échantillons de 5 boules.

b) $C_{10}^1 \cdot C_{15}^4 + C_{10}^2 \cdot C_{15}^3 + C_{10}^3 \cdot C_{15}^2 + C_{10}^4 \cdot C_{15}^1 + C_{10}^5 =$ $C_{25}^5 - C_{15}^5$: 50127échantillons possibles = Nombre totale d'échantillons de taille 5 - nombre d'échantillons ne contenant aucune boule rouge.

c) $C_{17}^5 + C_8^1 \cdot C_{17}^4 = 25228$ échantillons.

d) $C_{18}^5 = 8568$ échantillons.

e) $C_8^5 + C_{10}^5 + C_7^5 = 329$ échantillons.

I . 24 :

n : 12 et p = 6

a) $C_{12}^6 = 924$ lots possibles de 6 pots.

b) $C_{10}^6 + C_{10}^5 + C_{10}^5 = 714$: il s'agit de lots ne contenant ni fraise ni framboise ou des lots avec fraise mais sans framboise ou avec framboise mais sans fraise $= C_{12}^6 - C_{10}^4$.

c) $C_{10}^4 + C_{11}^6 = 672$: il s'agit des lots là où il y'a citron et cassis ou des lots sans citron.

d) $C_9^3 = 84$ lots distincts.

I.25 :

a) $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \; ; \; C_{n-1}^p = \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} = \frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!}$$

$$C_{n-1}^{p-1} = \frac{(n-1)}{(p-1)!(n-p)!} = \frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!} \rightarrow$$

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = \frac{n(n-1)!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p$$

b) $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-2}^{p-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_p^{p-1} + C_{p-1}^{p-1}$

A partir de a) nous pouvons écrire :

$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

$C_{n-1}^p = C_{n-2}^p + C_{n-2}^{p-1}$

$\vdots$

$C_{p-1}^p = C_p^p + C_p^{p-1}$

$C_p^p = C_{p-1}^{p-1}$

$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-2}^{p-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots C_p^{p-1} + C_{p-1}^{p-1}$

Remarque :

Le triangle de Pascal permet d'obtenir rapidement les coefficients de la forme C_n^p d'un développement binomial. On lit facilement :

- Sur la $1^{ére}$ ligne les coefficients numériques du développement $(a + b)^{\circ}$
- Sur la 2ème ligne les coefficients numériques du développement $(a + b)^1$
- Sur la $n^{ème}$ ligne les coefficients numériques du développement $(a + b)^{n-1}$.

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5 a^4 b + 10 a^3 b^2 + 10 a^2 b^3 + 5a b^4 + b^5$$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5 b + 15 a^4 b + 20 a^3 b^3 + 15 a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6

Le triangle de Pascal a les propriétés suivantes :

P_1 : Le premier et le dernier nombre de chaque ligne est 1 .

P_2 : Chacun des autres nombres du tableau peut s'obtenir en ajoutant les deux nombres situés directement au dessus de lui ; c'est à dire en utilisant la relation :

$$\boxed{C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p}}$$

I.26 :

a) $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$; $C_n^{n-p} = \dfrac{n!}{(n-p)!(n-n+p)!} = C_n^p$

$\dfrac{n}{p} C_{n-1}^{p-1} = \dfrac{n(n-1)!}{p(p-1)!(n-p)!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

$= C_n^p \rightarrow$

$$\boxed{C_n^p = C_n^{n-p} = \frac{n}{p} C_{n-1}^{p-1}}$$

b) $n\, C_n^p = \dfrac{n.n!}{p!(n-p)!}$

$(p+1)\, C_n^{p+1} + p\, C_n^p = (p+1)\, \dfrac{n!}{(p+1)!.(n-p-1)!} + p\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

$$= \frac{n!(n-p)}{p!(n-p)!} + \frac{pn!}{p!(n-p)!} = n\, C_n^p$$

$$\boxed{nC_n^p = (p+1)\, C_n^{p+1} + pC_n^p}$$

$p\, C_{n+1}^{p+1} + C_n^{p+1} = p\dfrac{(n+1)!}{(n-p)!(p+1)!} + \dfrac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!}$

$$= \frac{p(n+1)! + n!(n-p)}{(n-p)!(p+1)!}$$

$$= \frac{(p(n+1)+(n-p))n!}{(n-p)!(p+1)!} = \frac{n(p+1)n!}{(p+1)!(n-p)!}$$

$$= \frac{nn!}{p!(n-p)!} = nC_n^p$$

$$\boxed{pC_{n+1}^{p+1} + C_n^{p+1} = nC_n^p}$$

I . 27 :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{A_n^p}{p!}$$

I . 28 :

Nous savons à partir de la formule du Binôme de Newton que:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}.b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots\dots\dots + C_n^n a^0 b^n$$

a) Pour a =1 et b = 1; cette formule s'écrit :

$$(1+1)^n = = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + C_n^n = 2^n$$

b) Pour a = 1 et b = -1 ; cette formule s'écrit :

$$(1-1)^n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \dots\dots\dots\dots + (-1)^p C_n^p + \dots\dots\dots + (-1)^n C_n^n = 0$$

c) Pour a = 1 et b = -2; cette formule s'écrit :

$$(1-2)^n = C_n^0 - 2C_n^1 + (-2)^2 C_n^2 + \dots\dots\dots + (-2)^p C_n^p$$
$$+ \dots\dots + (-2)^n C_n^n = (-1)^n$$

I . 29 :

$$S_0 = \sum_{y=0}^{n} C_n^y$$

La formule du Binôme de Newton s'écrit :

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots\dots\dots + C_n^p x^p + \dots\dots + C_n^n x^n \qquad (1)$$

a) Posons $x = 1$; dans l'équation (1). Il vient :

$$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 \dots\dots\dots + C_n^n = \sum_{y=0}^{n} C_n^y = 2^n$$

$$\boxed{S_0 = \sum_{y=0}^{n} C_n^y = 2^n}$$

b) Dérivons les deux membres de l'équation (1) par rapport à x. on obtient :

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + \dots\dots\dots + nC_n^n x^{n-1} \qquad (2)$$

Posons $x = 1$ dans cette équation ; il vient :

$$n(1+1)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + \dots\dots\dots + nC_n^n = \sum_{y=1}^{n} yC_n^y$$

$$\boxed{S_1 = \sum_{y=1}^{n} y\,C_n^y = n2^{n-1}}$$

c) Derivons les deux membres de l'équation (2) par rapport à x. Il vient :

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = 2C_n^2 + 3.2C_n^3 x + \dots\dots + y(y-1)C_n^y\, x^{y-2}$$

$$+ \dots\dots + n(n-1)C_n^n x^{n-2} \qquad (3)$$

Posons $x = 1$; dans cette équation: il vient :

$$n(n-1)(1+1)^{n-2} = 2C_n^2 + 3.2C_n^3 + \ldots\ldots + y(y-1)C_n^y$$

$$+\ldots\ldots n.(n-1)C_n^n = \sum_{y=2}^{n} y(y-1)C_n^y$$

$$\boxed{S_2 = \sum_{y=2}^{n} y(y-1)C_n^y = n(n-1)2^{n-2}}$$

d) S_3 peut s'exprimer en fonction de S_1 et S_2. Nous pouvons vérifier que $S_3 = S_1 + S_2$.

En effet :

$$S_1 + S_2 = \sum_{y=1}^{n} yC_n^y + \sum_{y=2}^{n} y(y-1)C_n^y$$

$$= \sum_{y=1}^{n} yC_n^y + \sum_{y=1}^{n} y(y-1)C_n^y$$

$$= \sum_{y=1}^{n} y^2 C_n^y = S_3$$

$$S_3 = S_1 + S_2 = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = n(n+1)2^{n-2}$$

$$\boxed{S_3 = n(n+1)2^{n-2}}$$

e) $S_4 = \sum_{y=1}^{n} y(y+1)C_n^y$

Nous pouvons vérifier que $S_4 = S_1 + S_3 = 2S_1 + S_2$.

Donc :

$$\boxed{S_4 = n(n+3)2^{n-2}}$$

f) $S_5 = \sum_{y=0}^{n} (y^2 + 1)C_n^y$

Nous pouvons vérifier que :

$S_5 = S_0 + S_3 = S_0 + S_1 + S_2$

$S_5 = [4 + n(n+1)]2^{n-2}$

$$\boxed{S_5 = [4 + n(n+1)]2^{n-2}}$$

I . 30 :

a) $C_n^3 - C_n^2 = \frac{n^3 - 6n^2}{6} + 5$

$\frac{n!}{3!(n-3)!} - \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n^3 - 6n^2 + 30}{6} \rightarrow$

$n(n-1)(n-2) - 3n \ (n-1) = n^3 - 6n^2 + 30 \longrightarrow$

$n^3 - 6n^2 + 5n = n^3 - 6n^2 + 30 \rightarrow$

$$\boxed{n = 5}$$

b) $\frac{C_n^5}{C_n^4} = 17 \rightarrow \frac{n-4}{5} = 17 \rightarrow$ $\boxed{n = 89}$

c) $A_n^2 = 90 \rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1) = 90 \rightarrow$ $\boxed{n = 10}$

d) $A_n^3 = 120 \longrightarrow \frac{n!}{(n-3)!} = n(n-1)(n-2) = 120 \rightarrow$ $\boxed{n = 6}$

e) $A_n^4 = 6A_n^3 \rightarrow n(n-1)(n-2)(n-3) = 6n(n-1)(n-2)$

$n - 3 = 6 \rightarrow$ $\boxed{n = 9}$

f) $2A_{2n}^2 + 50 = A_{2n}^2$

$2n\ (n-1) + 50 = 2n\ (2n - 1) = 4n^2 - 2n \rightarrow$

$2\ (n^2 - n) + 50 = 4\ n^2 - 2\ n \rightarrow 50 = 2\ n^2 \rightarrow$

$n^2 = 25 \rightarrow n = 5$. (n doit être positif).

$$\boxed{n = 5}$$

CHAPITRE II

ELEMENTS D'ALGEBRE DES ENSEMBLES

SECTION I : DEFINITION ET CONCEPTS ESSENTIELS DE PROBABILITE .

I . 1 Définition : Le calcul des probabilités a pour objet l'étude des mécanismes aléatoires ou non déterministes. La probabilité d'un événement est définie comme la fréquence d'apparition de cet événement sur un nombre infiniment grand d'épreuves identiques et indépendants. Ainsi, si un événement A peut se réaliser s fois sur un total de n épreuves équiprobables nous avons :

$$\text{P(réalisation de A)} = \quad P(A) = p = \frac{s}{n} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Cependant; Cette définition n'est pas toujours possible. En effet; lorsque le nombre de cas possibles est assez grand; il serait impossible sinon coûteux de dénombrer tous les cas favorables et tous les cas possibles et on se réfère dans ce cas à l'observation ou à un échantillon.

I . 2 : Concepts essentiels de probabilité :

a) Epreuve aléatoire :

Le calcul de probabilité intervient là où il y a incertitude. là où il y'a un choix entre plusieurs possibilités de natures incertaines. Ces possibilités s'appellent épreuves aléatoires.

b) Ensemble fondamental d'une épreuve :

L'ensemble fondamental d'une épreuve est constitué par l'ensemble des éventualités c'est-à-dire des résultats possibles. Cet ensemble comporte généralement un nombre fini d'éléments .On note cet ensemble E.

c) Evénement :

Les éléments de E sont les diverses éventualités correspondant aux résultats qui peuvent apparaître à la suite de l'épreuve considérée. On appelle événement un sous-ensemble quelconque A de E; c'est-à-dire une partie de E. Chacune des éventualités est un sous-ensemble particulier; il est constitué d'un élément unique. C'est pourquoi; on dit encore qu'une éventualité est un événement élémentaire.

Remarque :

* Si toutes les éventualités ont la même probabilité; ces éventualités sont dites équiprobables.

I . 3 : Langage de la Théorie des probabilités et langage de la théorie des ensembles.

Langage d'un ensemble	Langage des probabilités
E est un ensemble	E est un espace ou univers.
A est un sous ensemble de E	A est un événement de E.
ϕ L'ensemble vide noté ϕ	Evénement impossible.
La réunion de A et B noté $A \cup B$	La réalisation de A ou B (ou des deux).
L'intersection de A et B notée $A \cap B$	La réalisation simultanée de A et B.
A et B sont deux ensembles disjoints c'est à dire $A \cap B = \phi$	A et B sont deux événements incompatibles ou exclusifs.
Complément de A dans E notée C_E^A avec $A \cup C_E^A = E$ $A \cap C_E^A = \phi$	$\overline{A}$ événement contraire de A aux $A \cup \overline{A} = E$ $A \cap \overline{A} = \phi$
A - B : L'ensemble A moins B	A est réalisé mais B ne l'est pas.
A est inclus dans B : $A \subset B$	La réalisation de B entraîne celle de A

SECTION II : Les Axiomes de probabilité :

Soit un ensemble fondamental E et A_i = l'ensemble de ces événements . Nous avons les axiomes suivantes :

A_1 : La probabilité associée à tout événement Ai est positive ou nulle

$$P(A_i) \geq 0 .$$

A_2 : La probabilité associée à l'ensemble des événements est égale à 1.

$$P(E) = 1 .$$

A_3 : Soit A et B deux événements incompatibles. La probabilités de la réunion de ces événements est égale à la somme des probabilités de A et B

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

et d'une façon générale si A_1, A_2, ..., A_n sont n événements mutuellement incompatibles, nous avons :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n) = P(A_1) + (A_2) + \ldots\ldots + P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Remarques :

1°) Si A et B sont deux événements incompatibles, nous avons:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Si A. B et C sont des événements incompatibles nous avons:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

et d'une façon générale :

$$P(A_1 \cup A_2 \ldots\ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}\sum P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k}\sum\sum P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots\ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \ldots\ldots \cap A_n)$$

2°) A et $\overline{A}$ sont deux événements incompatibles →

$P(A \cup \overline{A}) = P(E) = P(A) + P(\overline{A}) = 1 \rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

$$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$$

3°) Si dans l'égalité ci-dessus; on fait $A = E \rightarrow \overline{A} = \phi \rightarrow$
$P(\overline{A}) = P(\phi) = 1 - P(A) = 1 - P(E) = 0 \rightarrow$

$$\boxed{P(\phi) = 0}$$

La probabilité de l'événement impossible est nulle.

A_4 : Si B est inclus dans A; alors $P(A) \geq P(B)$.

En effet : $A = B \cup (A - B) \rightarrow$

$P(A) = P(B) + P(A - B)$ avec $P(A - B) \geq 0 \rightarrow P(A) \geq P(B)$.

$$\boxed{\forall B \subset A \rightarrow P(A) \geq P(B)}$$

A_5 : En vertu des axiomes précédents ; nous pouvons écrire

$$\boxed{0 \leq P(A) \leq 1}$$

Remarque :

Inégalité de Boole :

Comme la probabilité de l'intersection est positive ou nulle; nous pouvons écrire :

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$.

$P(A \cup B \cup C) \leq P(A \cup B) + P(C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$.

et plus généralement :

$$P(A_1 \cup A_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \cup A_n) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Cette inégalité porte le nom **d'inégalité de Boole.**

SECTION III : LES PROBABILITES CONDITIONNELLES :

III . 1 Formule des probabilités conditionnelles :

Soit A et B deux événements incompatibles appartenant à un même ensemble E, avec

$P(A) > 0$; $P(B) > 0$ et $P(A \cap B) > 0$.

La probabilité de réalisation de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé s'appelle probabilité conditionnelle de B par rapport à A et se note : $P(B / A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

III . 2 Formule des probabilités composées :

La probabilité composée est la probabilité de réalisation de deux ou plusieurs événements. La formule des probabilités composées peut être déduite à partir de celle des probabilités conditionnelles :

En effet ; nous avons :

$P(A \cap B) = P(B). P(A / B) = P(A). P(B / A)$

$P(A \cap B \cap C) = P(A). P(B / A) . P(C / A \cap B)$

et d'une façon générale ; soit $\{A_1\ A_2 \ldots\ldots\ldots\ldots A_n\}$; $n \geq 2$ une famille d'événements quelconques d'un ensemble E, telle que l'on a

$P(A_1 \cap A_2 \ldots\ldots\ldots \cap A_n) \neq 0$; alors on a :

$$P(A_1 \cap A_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \cap A_n) = P(A_1) . P(A_2 / A_1) . P(A_3 / A_1 \cap A_2) \ldots\ldots . P(A_n / A_1 \cap A_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \cap A_{n-1})$$

Remarque :

La condition $P(A_1 \cap A_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \cap A_n) \neq 0$ implique que les événements A_1, $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap A_2 \cap A_3$, ... ,$A_1 \cap A_2$ .... $\cap A_{n-1}$ ont aussi des probabilités non nulles.

SECTION IV: EVENEMENTS INDEPENDANTS ; EVENEMENTS LIES :

IV. 1 Définition

Soit A et B deux événements de probabilité non nulle telle que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$.

Si $P(A / B) = P(A)$; on dit que la réalisation de A est indépendante de B; c'est-à-dire que la réalisation de A n'est pas affectée par le fait que B soit ou non réalisé.

Formellement :

A et B sont indépendants $\Leftrightarrow P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \rightarrow$

$$P(A \cap B) = P(A) . P(B)$$

Cette notion d'indépendance peut être étendue au cas d'une famille finie d'événements. Nous avons les définitions suivantes.

Définition 1 :

Indépendance K à K d'une famille d'événements :

Soit $\{A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots\ldots A_n\}$ avec $n \geq 2$, une famille d'événements de E, alors ces événements sont dits indépendants K à K si, pour toute sous-famille de K événements $\{A_{i1}, \ldots\ldots, A_{iK}\}$; $2 \leq K \leq n$; choisie dans la famille initiale, on a :

$$P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots\ldots\ldots\ldots \cap A_{ik}) = P(A_{i1}). P(A_{i2}) \ldots\ldots P(A_{ik}).$$

Définition 2 :

Indépendance mutuelle d'une famille d'événements :

Soit $\{A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, A_n\}$, $n \geq 2$, une famille d'événements de E; alors ces événements sont dit **mutuellement indépendants** (ou simplement **indépendants**) s'ils sont indépendants à la fois 2 à 2; 3 à 3, ... et n à n c'est-à-dire si on a :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Remarques :

* Dans le cas où l'égalité n'est pas vérifiée; on dit que A et B sont liés.

* L'indépendance de A_1 et A_2 implique l'indépendance de $\overline{A}_1$ et $\overline{A}_2$; $\overline{A}_1$ et A_2 ; $\overline{A}_2$ et A_1.

SECTION V : ALGEBRE DE BOOLE ET SIGMA ALGEBRE DE BOOLE

Soient :

E : Ensemble fondamental ou ensemble des résultats possibles.

A_i = Les événements de E.

P(E) l'ensemble des parties de E:

Si card E = $|E| = n$ alors card P(E) = $|P(E)| = 2^n$

Définition 1 : Algèbre de Boole

Soit A une famille de parties de E : $A \subset P(E)$

A est une algèbre de Boole si et seulement si elle possède les propriétés suivantes :

P_1 : $\phi \in A$.

P_2 : A est stable par complémentarité :

$\forall A \in A$; alors $\overline{A} \in A$

P_3 : A est stable par Union :

$\forall A_1$ et $A_2 \in A$ alors $A_1 \cup A_2 \in A$

Conséquences de la définition :

C_1 : $E \in A$; car $E = \overline{\phi}$

C_2 : E est stable par intersection finie .

$\forall A_1$ et $A_2 \in A$ alors $A_1 \cap A_2 \in A$.

En effet :

$\forall A_1 \in A \rightarrow \overline{A}_1 \in A$.

$\forall A_2 \in A \rightarrow \overline{A}_2 \in A$.

La stabilité par union $\rightarrow \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \in A$ et la stabilité par complementation

$$\rightarrow \overline{\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2} \in A \rightarrow \overline{\overline{A_1 \cap A_2}} \in A \rightarrow A_1 \cap A_2 \in A$$

Définition 2 : Sigma Algèbre de Boole (Tribu) :

Une famille $\mathcal{A}$ de parties de E est appelée une sigma algèbre de Boole (ou Tribu) si les propriétés suivantes sont verifiées :

P_1 : $E \in A$

P_2 : A est stable par complémetation.

P_3 : A est stable par union dénombrable.

Remarques :

* Une σalgèbre de Boole est toujours une algèbre de Boole . En effet ; la stabilité dénombrable de l'union entraine la stabilité finie de l'union puisqu'une union finie peut toujours se mettre sous forme d'union dénombrable.

* Un algèbre de Boole n'est pas necéssairement une σ algèbre de Boole . La stabilité par union et par intersection finie . n'entraine pas nécéssairament la stabilité par union et par intersection dénombrable.

* La stablité par complèmentarité et par union entraine la stablité par intersection. La stablité par complémentarité et par intersection entraine la stabilité par union.

Par contre; la stablité par union et par intersection n'entraine pas la stablité par complémentarité.

EXERCICES

II .1 :

Soient A. B. C des événements d'un ensemble E .

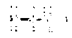
1°) Exprimer les événements suivants sous forme ensembliste:

a) A seul se produit.

b) A et B se produisent mais non C.

c) Aucun des trois événements ne se produit.

d) Les trois événements se produisent simultanément.



e) Au moins l'un des événements se produit.

f) Au moins deux des événements se produisent.

g) Deux événements exactement se produisent.

h) Deux événements au plus se produisent.

i) Deux événements ou plus se produisent.

j) Un seul événement se produit.

2°) Déterminer les ensembles :

$X = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B).$

$Y = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B).$

$Z = \overline{(\overline{A} \cap B)} \cap \overline{(A \cap B)}.$

$W = (A \cup C) \cap \left[\overline{(A \cup B \cup C)} \cup (A \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{C}\right]$

$\cap [C \cup (B \cap C)]$

$U = [A \cap (B \cup C) \cap (B \cap C) \cup \overline{C}]$

$V = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap C) \cup [\overline{(\overline{A} \cup B) \cap (A \cup C)}]$

II . 2 :

Soit A.B.C trois événements non-disjoints associés au même éspace E. Démontrer que :

1°) $P (A \cup B) = P (A) + P (B) - P (A \cap B)$.

2°) $P (A \cup B \cup C) = P (A) + P(B) + P (C) - P (A \cap B) - P (B \cap C) - P (A \cap C) + P (A \cap B \cap C)$

II . 3 :

Soit A et B; deux événements de E.

1°) Montrer que :

a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

2°) On note $A \Delta B$ la différence symétrique de A et de B définie par : $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.

a) Montrer que :

$A \Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$.

b) En déduire l'expression du complémentaire de cette différence symétriques : $\overline{A \Delta B}$

II . 4 :

On considère l'ensemble des demandeurs d'emploi et soit les événements suivants :

B = Ensemble des demandeurs d'emploi titulaires du Bac Economie.

E = Ensemble des demandeurs d'emploi titulaires de la Maîtrise d'Economie.

G = Ensemble des demandeurs d'emploi titulaires de la Maîtrise de Gestion.

On suppose qu'un demandeur d'emploi ne peut être titulaire de 2 maîtrises et que $P(B) = \frac{1}{3}$; $P(E) \frac{1}{5} =$; $P(G) = \frac{1}{6}$

On suppose aussi que la moitié des maitrisards possède le Bac Economie. Calculer la probabilité de l'événement :

A = Ensemble des demandeurs d'emploi ayant au moins un des trois diplômes.

II . 5 :

Soient 3 événements A_1, A_2, et A_3 d'un même éspace probabilisable E.

On donne

$$S_1 = \sum_{i=1}^{3} P(A_i) = 0.9 ; S_2 = \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{3} P(A_i \cap A_j) \right) = 1,5 ;$$

$$S_3 = P\left(\bigcap_{i=1}^{3} A_i \right) = 0.05$$

Soient les événements :

B = Au moins l'un des trois événements se réalise :

C = exactement l'un des trois événements se réalise.

D = Au moins deux des trois événements se réalisent.

Calculer P (B); P (C) et P (D) .

II . 6 :

Deux lignes téléphoniques aboutissent à un même standard. Désignons par :

B_1 = L'événement « la ligne L_1, est occupée »

B_2 = L'événement « la ligne L_2, est occupée »

On donne les probabilités suivantes :

$P(B_1) = 0{,}7$; $P(B_2) = 0{,}5$; $P(\overline{B_1} \cap B_2) = 0{,}3$.

Déterminer les probabilités des événements suivants :

1°) A_1 = Une ligne au moins est occupée.

2°) A_2 = Une seule ligne est libre.

3°) A_3 = Les deux lignes sont libres.

4°) A_4 = Une ligne au plus est occupée.

II . 7 :

Dans une Banque, sur 100 personnes qui ont posé leur candidature à un emploi de secrétaire de direction, 40 ont une expérience professionnelle antérieure, 30 ont un diplôme de dactylo-Sténo et 20 ont à la fois le diplôme et l'expérience.

1°) Quelle est la probabilité pour qu'une des 100 candidates tirée au hasard ait soit l'expérience, soit le diplôme, soit les deux ?

2°) Quelle est la probabilité pour qu'une des 100 candidates tirées au hasard ait soit l'expérience, soit le diplôme mais pas les deux?

3°) Calculer la probabilité pour qu'une candidate choisie au hasard parmi celles ayant une expérience antérieure possède aussi le diplôme de dactylo-Sténo.

4°) Les événements que vous aurez au préalable définis sont - ils indépendants?

II . 8 :

Soit A, B et C, trois événements associés à un éspace probabilisable E.

Dans une population 40% des individus ont A, 60% ont B; 70% ont C ; 30% A et B ; 25% A et C ; 40% B et C et 18% A, B et C.

On extrait au hasard de la population un individu.

1°) Quelle est la probabilité pour que :

a) il ait A et B et n'ait pas C. ?

b) il ait au plus deux événements ?

c) il ait au moins deux événements ?

d) il ait exactement deux événements ?

e) il ait au moins un événement ?

f) il n ait aucun des trois événements?

2°) On constate que l'individu extrait a l'événement A.Quelle est la probabilité pour qu'il :

a) ait B?

b) ait B et C?

c) ait B ou C?

d) n' ait ni B ni C?

e) ait B mais non C?

3°). On constate que l'individu extrait aux les événement B et C. Quelle est la probabilité pour qu'il ait A.

II . 9 :

Soit A et B deux événements d'un éspace probabilisable E tel que :

P (A) = 0,7 et P (B) = 0,3.

1°) Choisir pour $P(A \cap B)$ l'une des valeurs 0,2 ; 0,4 ou 0,5 et calculer :

a) $P(A \cup B)$;

b) $P(\overline{A} \cup B)$;

c) $P(\overline{A} / B)$

d) $P(B / A)$.

2°) Choisir pour $P(A \cup B)$ l'une des valeurs 0,5; 0,65 ou 0,9 et calculer :

a) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

b) $P(B / A)$

c) $P(B / \overline{A})$

3°) Choisir pour $P(A / \overline{B})$ l'une des valeurs 0,3.0,5 ou 0.7 et calculer :

a) $P(A \cup B)$;

b) $P(B/ A)$ et

c) $P(\overline{A} / B)$

II . 10 :

1°) Soit deux événements A et B indépendants associés à un éspace probablisable E . Monter que :

a) A et $\overline{B}$ sont indépendants.

b) $\overline{A}$ et B sont indépendants.

c) $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

2°) Soient trois événements A. B et C mutuellement indépendants associés à un èspace probalisable E . Montrer que :

a) A, B, $\overline{C}$ sont indépendants.

b) A, $\overline{B}$, $\overline{C}$. sont indépendants.

c) $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ sont indépendants.

3°) Soient n événements A_1 A_2...., A_n mutuellements indépendants. On acceptera que $\overline{A_1}$. $\overline{A_2}$ . ... $\overline{A_n}$ Soiènt mutuellement indépendants. Montrer que :

$P(A_1 \cup A_2 \ldots\ldots \cup A_n) = 1-(1-P(A_1))(1-P(A_2))\ldots\ldots$
$(1-P(A_n))$.

II . 11 :

Soit A et B, deux événements associés à une certaine expérience. On donne :

$P(A) = 0{,}3$; $P(A \cup B) = 0{,}7$: $P(B) = p$.

1°) Déterminer p si A et B sont incompatibles

2°) Déterminer p si A et B sont indépendants.

3°) Calculer dans le cas de la 2ème question; la probabilité des événements suivants:

a) A ou B se produit.

b) A seulement se produit.

c) Aucun événement ne se produit.

d) Un seulement des 2 événements se produit.

e) A ou non B; mais l'un seulement de ces 2 événements.

4°) Calculer dans le cas de la 2ème question :

$P(\overline{A} \cup \overline{B})$; $P(A \cup \overline{B})$; $P(\overline{A} \cup B)$; $P(A \cap \overline{B})$

$P(\overline{A} \cap B)$; $P(\overline{A} \cap \overline{B})$; $P(\overline{A}/B)$; $P(B/\overline{A})$

$P(\overline{A}/\overline{B})$

II . 12 :

Soit l'expérience qui consiste à jeter simultanément deux dés parfaits.

Soit les événements suivants :

A_1 = la somme des 2 dés est paire.

A_2 = Le premier dé présente une face impaire.

A_3 = Le deuxième dé présente une face paire.

1°) A_1, A_2, A_3 sont-ils mutuellement indépendants ?

2°) $A_1 \cap A_3$ et A_2 sont-ils indépendants ?

3°) $A_1 \cap A_2$ et A_3 sont-ils indépendants ?

4°) $A_1 \cup A_3$ et A_2 sont-ils indépendants ?

5°) $A_1 \cup A_2$ et A_3 sont-ils indépendants ?

II . 13 :

Une urne contient 4 pièces de monnaie dont trois sont normales (c'est à dire qu' elles ont un côté « pile » et un côté « face ») et une pièce anormale dont les deux côtés sont « piles ».

Si on tire une pièce de l'urne et on la jette deux fois, quelle est la probabilité pour obtenir :

1°) Deux fois « pile »?

2°) Deux fois « face »?

3°) Une fois pile et une fois face ?

II . 14 :

On a vendu n billets de la loterie nationale qui comporte 5 prix à distribuer.

1°) Quelle est la probabilité de gagner au moins un prix, si j'en achète 2 billets ?

2°) Quelle est la probabilité de gagner les 5 prix ,si j'en achète K billets ($K \geq 5$) ?

II . 15 :

Quel est le plus probable : jouant avec un dé et obtenir au moins une fois 6 en 4 coups, ou , jouant avec 2 dés et obtenir au moins une fois deux 6 en 20 coups.?

II . 16 :

Il y a N personnes : p_1, p_2, ..., p_N dans une ville. Au cours d'un sondage, on prélève un échantillon de taille n personnes dans cette population.

1°) Si on effectue un sondage sans remise:

a) Quel est le nombre d'échantillons distincts que l'on peut former?

b) Quel est le nombre d'échantillons distincts comprenant un individu donné p_i ?

c) Quelle est la probabilité pour que p_i appartienne à l'échantillon prélèvé ?

2°) Répondre aux questions a), b), et c) de 1° dans le cas où le sondage s'effectue avec remise.

II . 17 :

Dans une faculté : 40% des étudiants échouent en Statistiques; 50% en Mathématiques et 25% des étudiants échouent en Mathématiques et en Statistiques.

On choisit un étudiant au hasard :

1°) Si l'étudiant a échoué en Mathématiques ; quelle est probabilité qu'il n'ait pas échoué en Statistiques ?

2¡) Si l'étudiant n'a pas échoué en Statistiques ; quelle est la probabilité qu'il n'ait pas encore échoué en Mathématiques?

3¡) Si l'étudiant, a échoué en Statistiques; quelle est la probabilité qu'il ait aussi échoué en Mathématiques ?

4¡) Quelle est la probabilité qu'il ait échoué en une matière au moins?

5¡) Quelle est la probabilité qu'il ait échoué en une seule matière?

II . 18 :

On lance 10 boules numérotées de 1 à 10 vers 10 cases également numérotées de1 à 10; une case ne recevant qu'une boule.

1°) Calculer la probabilité que la boule n°1 entre dans la case n°1.

2°) Calculer la probabilité que les boules paires entrent dans leurs cases respectives (en supposant que seules les boules paires seront jetées).

3°) Calculer la probabilité que chacune des 10 boules ait retrouvé la case portant son numéro.

4°) Sachant que les 9 premieres boules ont retrouvé la case portant leur numéro; quelle est la probabilité que la dernière boule rate la case portant son numéro?

II . 19 :

On lance trois dés identifiables. Un joueur A gagne la partie si le total des points présentés par les trois dés est 12. Un joueur B gagne la partie si le total des point est 13 et un joueur C gagne la partie si le total des points est 14.

Ce jeu est-il équitable?

II . 20 :

Une pièce de monnaie est lancée 5 fois. Un joueur A gagne la partie si le côté « Pile » de la pièce se présente au moins 4 fois. Un joueur; B gagne la partie si le côté « Pile » et le côté « face » se présente chacun au moins 2 fois.

Ce jeu est-il équitable?

II . 21 :

Trois étudiants A, B et C passent le même jour un examen. Les trois examens sont différents et se passent en des lieux différents.

Les probabilités de réussite sont estimées à :

P(A) = 0,7 ; P (B) = 0,4 ; P (C) = 0,6.

Calculer la probabilité :

1°) que les trois étudiants soient reçus.

2°) que les trois étudiants échouent.

3°) qu'un seul étudiant soit reçu.

4°) qu'au moins un étudiant soit reçu.

5°) que A seulement soit reçu.

6°) qu'au moins deux étudiants soient reçus.

II . 22 :

Une urne contient x boules dont y sont blanches et les autres étant noires.

La probabilité de tirer une boule blanche au premier tirage est 1/4; la probabilité de tirer une boule blanche puis une boule noire sans remise est égale à 1/5.

Calculer x et y.

II . 23 :

Une urne contient x boules dont 5 sont blanches et les autres étant noires.

1°) A l'occasion d'un tirage sans remise de deux boules, la probabilité d'obtenir une boule blanche puis une boule noire est égale à 5/18.

Calculer x.

2°) Même question si le tirage de deux boules est effectué avec remise.

II . 24 :

Une urne U_1 contient 8 boules dont 3 sont blanches et une urne U_2 contient 5 boules dont 2 blanches. On tire au hasard une boule dans chaque urne ?

1°) Quelle est la probabilité p_1, pour que les deux boules soient blanches, ?

2°) Quelle est la probabilité p_2 pour que les deux boules ne soient pas blanches ?

3°) Quelle est la probabilité p_3 pour que l'une des boules soit blanches et l'autre ne le soit pas ?

4°) Si l'une des boules est blanche et l'autre ne l'est pas; quelle est la probabilité p_4 pour que la boule blanche provienne de l'urne U_1?

II. 25 :

Deux chasseurs A et B font feu simultanément sur un lièvre. Soit:

P (A) = probabilité de voir A toucher le lièvre = 0,8.

P (B) = probabilité de voir B toucher le lièvre= 0,9.

1°) Si A et B tirent chacun deux fois, quelle est la probabilité que la cible soit atteinte au moins une fois ?

2°) Si A et B tirent chacun une fois et si la cible n'est atteinte qu'un seule fois; quelle est la probabilité pour que ce soit A qui ait atteint la cible?

3°) Si A ne peut tirer que deux fois; combien de fois B doit-il tirer pour que la probabilité d'atteindre le lièvre soit au moins égale à 0,9999 ?

4°) Si A ne peut tirer qu'une seule fois; combien de fois B doit il tirer pour que la probabilité d'atteindre le lièvre soit au moins égale à 0,999 ?

II. 26 :

On considére un questionnaire comprenant 8 questions indépendantes à chacune desquelles on doit répondre par oui ou par non.

1°) Combien peut-on donner de réponses différentes si l'on répond par 4 oui et 4 non?

2°) Quelle est la probabilité d'avoir 2 réponses justes parmi les oui et 3 réponses justes parmi les non?

II . 27 :

Une urne contient 8 boules noires et 4 boules blanches.

I) On tire une boule de l'urne au hasard. On la met de côté, et l'on remet deux boules de l'autre couleur dans l'urne. On tire une seconde boule au hasard de l'urne. Calculer la probabilité que :

1°) La boule tirée soit noire.

2°) Les deux boules soient de la même couleur.

II) Répondre aux mêmes questions en supposant que l'on remet deux boules de la même couleur que la première boule tirée.

II . 28 :

Un appareil de jeu fait tomber 4 billes numérotées 1,2,3 et 4 dans 2 cases désignées par a et b. Chaque répartition est également probable.

1°) Décrire et dénombrer l'ensemble des possibilités.

2°)Calculer la probabilité de l'événement « la case a est vide ».

3°) Calculer la probabilité de l'événement « la case a contient au moins une bille ».

4°) On fait le total des numéros des billes tombées dans la case a et on en retranche le total des numéros des billes tombées dans la case b.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir un résultat nul?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir un résultat strictement positif?

II . 29 :

Les nombres 1,2,3...,n sont déposés au hasard linéairement.

1°) Quelle est la probabilité que 1 et 2 apparaissent dans cet ordre côte à côte ?

2°) Quelle est la probabilité que 1,2,3, apparaissent dans cet ordre côte à côte ?

3°) Quelle est la probabilité que 1,2,3,....m ($m < n$) apparaissent dans cet ordre côte à côte ?

II . 30 :

On jette une pièce de monnaie n fois. On donne la signification suivante aux événements A et B:

A = Face est obtenue au plus 1 fois.

B = Pile et Face sont obtenus au moins une fois chacun.

A et B sont ils indépendants dans les 2 cas suivants :

1°) $n = 2$?

2°) $n = 3$?

II . 31:

Soit A, B, C trois événements quelconques d'un ensemble E tel que $A \cap C \neq \phi$; $B \cap C \neq \phi$ et $A \cap B = \phi$.

1°) Vérifier que

$P[(A \cup B)/C] = P(A/C) + P(B/C)$

2°) Etudier le cas où $A \cap B \neq \phi$.

II . 32 :

Répondre par vrai ou faux (justifier votre réponse) :

1°) Deux événements incompatibles sont deux événements indépendants.

2°) Deux événements indépendants sont deux événements incompatibles.

3°) soit A et B deux événements tel que:

$P(A) + P(\bar{B}) > 1$

Alors A et $\bar{B}$ sont indépendants.

4°) Le principe des probabilités composées s'énonce toujours comme suit:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

5°) Deux étudiants passent le même jour un examen:

P (A) = Probabilité de succés pour le premier = 0,8.

P (B) = Probabilité de succ_s pour le second = 0,7.

Alors ; la probabilité qu'ils échouent tous les deux est de 0,5.

6°) Deux chasseurs A et B font feu simultanément sur un lièvre.

P (A) = Probabilité de voir A toucher le lièvre = 0,8.

P (B) = Probabilité de voir B toucher le lièvre = 0,9.

La probabilité de voir l'animal atteint = 0, 92.

7°) Soit (A,B,C) 3 événements appartenant à un même ensemble et deux à deux indépendants; alors :

$P(A \cap B \cap C) = PA) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

II . 33 :

Soit E un ensemble des résultats possibles d'une expérience quelconque; P(E) , l'ensemble des parties de E et $A \subset P(E)$

1°) Determiner toutes les tribus A définies sur E; avec

a) $E = \{a,b\}$; b)$E = \{a,b,c\}$.

2°) Soit $E = \{a,b,c,d,e\}$

Déterminer une tribu A contenant les événements $\{a\};\{b\};\{c\}$.

3°) Soit E = { a, b, c, d}.

$A = \{\phi;\{a\}:\{b\};\{b,c,d\};\{a,c,d\};\{a,b,c,d\}\}$.

A est elle une tribu ?

II . 34 :

Soit E un ensemble fondamental muni de deux tribus A_1 et A_2. On désigne par $A_1 \cap A_2$ (repectivement $A_1 \cup A_2$) la famille des parties dans A_1 et dans A_2 (respectivement dans A_1 ou A_2).

1°) Montrer que $A_1 \cap A_2$ est une tribu.

2°) Vérifier sur un exemple que $A_1 \cup A_2$ n'est pas nécessairement une tribu.

SOLUTIONS PROPOSEES

II . 1 :

1°)

a) $A\cap\overline{B}\cap\overline{C} = A-(A\cap B)-(A\cap C)+(A\cap B\cap C)$

b) $A\cap B\cap\overline{C}=(A\cap B)-(A\cap B\cap C)$

c) $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}=\overline{A\cup B\cup C}$

d) $A\cap B\cap C$

e) $A\cup B\cup C$

f) $(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$

g) $(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)$

h) $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}=\overline{A\cap B\cap C}$

i) $(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$

j) $(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)$

2°) $X=(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)=(A\cup\overline{A})\cap B=E\cap B=B$

$Y=(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup B)=\overline{A}\cup(\overline{B}\cap B)=\overline{A}$

$Z=(\overline{\overline{A}\cap B})\cap(\overline{A\cap B})=(A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup\overline{B})=\overline{B}\cup\left[A\cap\overline{A}\right]=\overline{B}=\overline{X}$

$$W=(A\cup C)\cap\left[(\overline{A\cup B\cup C})\cup(A\cap\overline{C})\cup(B\cap\overline{C})\right]\cap[C\cup(B\cap C)]$$

$$=(A\cup C)\cap\left[(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{C})\cup(B\cap\overline{C})\right]\cap C$$

$$=(A\cup C)\cap\left[\overline{C}\cap\left((\overline{A}\cap\overline{B})\cup(A\cup B)\right)\right]\cap C=\phi.$$

$$U=\left[A\cap(B\cup C)\cap(B\cap C)\cup\overline{C}\right]=\left[A\cap(B\cup C)\cap(B\cup\overline{C})\cap(C\cup\overline{C})\right]$$

$$=A\cap(B\cup C)\cap(B\cup\overline{C})=A\cap B-A\cap B\cap C.$$

$$V=(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap C)\cup\left[\overline{(\overline{A}\cup B)\cap(A\cup C)}\right]$$

$$=(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap C)\cup(\overline{\overline{A}\cup B})\cup(\overline{A\cup C})$$

$= (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{C})$

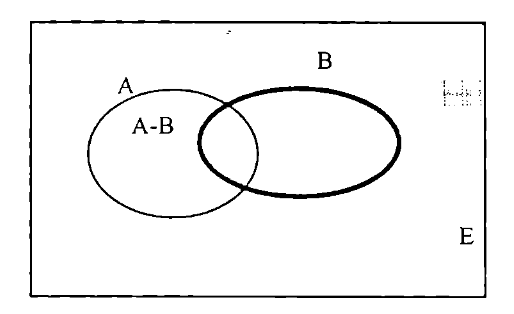
$= A \cap (B \cup \overline{B}) \cup \overline{A} \cap (C \cup \overline{C})$

$= A \cap E \cup \overline{A} \cap E = A \cup \overline{A} = E$

•

II . 2 :

1) Nous avons la représentation graphique suivante :



$A \cup B = (A - B) \cup B$ qui sont incompatibles.

$P(A \cup B) = P(A - B) + P(B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B)$.

d' où:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

2°) $P(A \cup B \cup C) = P(A \cup D)$

$= P(A) + P(D) - P(A \cap D)$

Avec $D = B \cup C \rightarrow$

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B \cup C) - P[A \cap (B \cup C)]$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C)$

$+ P(A \cap B \cap C)$.

d'où :

$$\boxed{\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = \quad & P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap C) \\ & - P(A \cap B) + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}}$$

II . 3 :

1°)

a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

$\forall x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \text{ et / ou } x \notin B \Leftrightarrow$

$x \in \overline{A} \text{ et / ou } x \in \overline{B} \rightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$

Ainsi:

$$\boxed{\forall x \in \overline{A \cap B} \rightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}.}$$

De même:

$\forall x \in \overline{A} \cup \overline{B} \rightarrow x \in \overline{A} \, ou \, x \in \overline{B} \rightarrow$

$x \notin A \, ou \, x \notin B \rightarrow x \notin A \cap B \rightarrow x \in \overline{A \cap B}$

Ainsi : $\boxed{\forall x \in A \cup B \rightarrow x \in A \cap B}$

Nous avons démontré que :

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in \overline{A \cap B} \rightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B} \\ et \forall x \in \overline{A} \cup \overline{B} \rightarrow x \in \overline{A \cap B} \end{array}\right\} \rightarrow \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$

$\forall x \in \overline{A \cup B} \rightarrow x \notin A \cup B \rightarrow$

$x \notin A \text{ et } x \notin B \rightarrow x \in \overline{A} \text{ et } x \in \overline{B} \rightarrow \quad x \in A \cap B$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \overline{A \cup B} \rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}}$$

De même

$\forall x \in \overline{A} \cap \overline{B} \rightarrow x \in \overline{A} \text{ et } x \in \overline{B}$

$\rightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B \rightarrow x \notin A \cup B \rightarrow x \in \overline{A \cup B} \rightarrow$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \overline{A} \cap \overline{B} \rightarrow x \in \overline{A \cup B}}$$

Nous avons démontré que :

$$\left.\begin{array}{l}\forall x \in \overline{A \cup B} \rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B} \\ et \forall x \in A \cap B \rightarrow x \in \overline{A \cup B}\end{array}\right\} \rightarrow \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Remarques :

* Nous pouvons écrire dés le début l'équivalence;
* Ces formules sont généralisables: et nous avons $\forall A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots A_n$; n événements quelconques d'un ensemble E ;

$$\boxed{\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}}$$

$$\boxed{\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}}$$

2°)

a) $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$

$= \underbrace{(A \cup \overline{A})}_{E} \cap (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) \cap \underbrace{(\overline{B} \cup B)}_{E}$

$= (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A})$

$= (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$

$$\boxed{A \Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})}$$

b) $\overline{A\Delta B} = \overline{(A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})}$

$$= \overline{(A \cup B)} \cup \overline{\overline{(A \cap B)}}$$

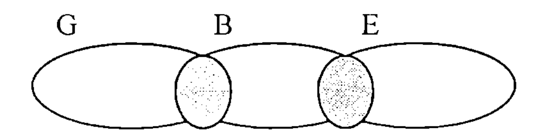
$$= (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$$

$$= (\overline{A} \cup A) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{B} \cup A) \cap (\overline{B} \cup B)$$

$$\boxed{\overline{A\Delta B} = (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{B} \cup A).}$$

II. 4 :

Nous avons :



Avec : $P(B \cap E) = \frac{1}{10}$; $P(B \cap G) = \frac{1}{12}$

puisque la moitié des maitrisards possède le Bac Math.
Par conséquent :

$$P(A) = P(B \cup E \cup G) = P(B) + P(E) + P(G) - P(B \cap E) - P(B \cap G)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} = \frac{62}{120}.$$

II.5 :

$P(B) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$

$-P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - (A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

Nous avons :

$$S_1 = \sum_{i=1}^{3} P(A_i) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{3} PA_i \cap A_j \right) = \sum_{i=1}^{3} P\big([A_i \cap A_j) + P(A_i \cap A_2) + P(A_i \cap A_3)\big)$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + 2P(A_1 \cap A_2) + 2P(A_i \cap A_3)$$

$$+ 2P((A_2 \cap A_3)$$

$S = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ On demande de calculer :

$*P(B = P((A_1 \cup A_2 \cup A_3) \rightarrow$

$PB) = S_1 - \frac{1}{2}(S_2 - S_1) + S_3 = 0,65$

$*P(C) = P(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) + P(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) + P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3)$

$= P(A_1) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

$+P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

$+P(A_3) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3 + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - 2P(A_1 \cap A_2) - 2P(A_1 \cap A_3)$

$-2P(A_2 \cap A_3) + 3P(A_1 \cap A_2 \cap A_3$

$= S_1 + (S_1 - S_2) + 3S_3 = 2S_1 - S_2 + 3S_3$

$P(C) = 2S_1 - S_2 + 3S_3 = 0.45$

$$*P(D) = P[(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)]$$
$$= P(A_1 \cap A_2) + (A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) - 2P(A_1 \cap A_2 \cap A_3$$
$$= \frac{S_2 - S_1}{2} - 2S_3 = 0.2$$

$$\boxed{P(D) = \frac{S_2 - S_1}{2} - 2S_3 = 0.2}$$

II. 6 :

$1°)P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2) = 0.9$

$2°)P(B_1 \cap \overline{B_2} \cup \overline{B_1} \cap B_2) = P(B_1 \cap \overline{B_2}) + P(\overline{B_1} \cap B_2)$

$= P(B_1) + P(B_2) - 2P(B_1 \cap B_2)$

$= P(B_1 \cup B_2) - P(B_1 \cap B_2) = 0.6$

$3°)P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = P(\overline{B_1 \cup B_2}) = 1 - P(B_1 \cup B_2) = 0.1$

$4°)P(\overline{B_1} \cup \overline{B_2}) = P(\overline{B_1 \cap B_2}) = 1 - P(B_1 \cap B_2) = 0.7$

II . 7 :

Soit les événements :

E = La candidate a une expérience passée.

D = La candidate a un diplôme de dactylo-Sténo.

nous avons :

$P(E) = 0.4$; $P(D) = 0.3$; $P(E \cap D) = 0.2.$

$1°)P(E \cup D) = P(E) + P(D) - P(E \cap D) = 0.5.$

$2°)P(E \cap \overline{D} \cup \overline{E} \cap D) = P(E \cap \overline{D}) + P(\overline{E} \cap D)$

$= P(E \cup D) - P(E \cap D) = 0.3.$

$3°)P(D / E) = \dfrac{P(E \cap D)}{P(E)} = \dfrac{0.2}{0.4} = 0.5.$

$4°)P(E \cap D) \neq P(E).P(D)$

$0.2 \neq 0.4.0.3 \rightarrow$ E et D sont liés.

II . 8 :

Soit les événements :

A = L'individu extrait à l'événement A.

B= L'individu extrait àl'événement B.
C= L'individu extrait à l'événement C.

1°)

a) $P(A\cap B\cap \overline{C}) = P(A\cap B) - P(A\cap B\cap C) = 0.3 - 0.18 = 0.12$

b) $P(\overline{A}\cup \overline{B}\cup \overline{C}) = P(\overline{A\cap B\cap C}) = 1 - P(A\cap B\cap C) = 0.82.$

c) $P(A\cap B\cup A\cap C\cup B\cap C) = P(A\cap B) +$
$P(A\cap C) + P(B\cap C) - 2P(A\cap B\cap C) = 0.59$

d) $P(A\cap B\cap \overline{C}\cup A\cap \overline{B}\cap C\cup \overline{A}\cap B\cap C) = P(A\cap B) +$
$PA\cap C) + P(B\cap C) - 3P(A\cap B\cap C) = 0,41$

e) $P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) -$
$P(A\cap C) - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C) = 0,93$

g) $P(\overline{A}\cap \overline{B}\cap \overline{C}) = P(\overline{A\cup B\cup C}) = 1 - P(A\cup B\cup C) = 0,07$

2°)

a) $$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{0,3}{0,4} = 0,75$$

b) $$P(B\cap C/A) = \frac{P(A\cap B\cap C)}{P(A)} = \frac{0,12}{0,4} = 0,45$$

c) $$P(B\cup C/A) = \frac{P[(B\cup C)\cap A]}{P(A)} = \frac{P[(B\cap A)\cup (C\cap A)]}{P(A)}$$
$$= \frac{P(A\cap B) + P(A\cap C) - P(A\cap B\cap C)}{P(A)} = \frac{0,37}{0,4} = 0,92$$

d) $$P\left[(\overline{B}\cap \overline{C}) / A\right] = \frac{P(\overline{B}\cap \overline{C}\cap A)}{P(A)} =$$
$$\frac{P(A) - P(A\cap B) - P(A\cap C) + P(A\cap B\cap C)}{P(A)} = \frac{0.03}{0.4} = 0.075$$

e) $P[B \cap \overline{C} / A] = \dfrac{P[A \cap B \cap \overline{C}]}{P(A)} =$

$$\frac{P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C)}{P(A)} = \frac{0.12}{0.4} = 0.3$$

3°) $P(A / B \cap C) = \dfrac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = \dfrac{0.18}{0.4} = 0.45$

II . 9 :

1°)

$A \cap B \subset A$ *et* $A \cap B \subset B$ $\rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} P(A \cap B) \leq P(A) \\ et \\ P(A \cap B) \leq P(B) \end{array}\right\} \rightarrow \text{ on choisit } P(A \cap B) = 0.2$$

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.8$

b) $P(\overline{A} \cup B) = P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A} \cap B)$

$= 1 - P(A) + P(B) - P(B) + P(A \cap B) = 0.5$

c) $P(\overline{A} / B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - P(A / B) = 0.33$

d) $P(B / A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0.2}{0.7} \approx 0.29$

2°) *1ere méthode :*

$A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B \rightarrow$

$P(A) \leq P(A \cup B)$ et $P(B) \leq P(A \cup B)$

on choisit $P(A \cup B) = 0.9$

2ème méthode :

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = 0.5 \rightarrow P(A \cap B) = 0.5 > P(B)$ à rejeter

$P(A \cup B) = 0,65 \rightarrow P(A \cap B) = 0,35 > P(B)$ *à rejeter .*

$P(A \cup B) = 0,9 \rightarrow P(A \cap B) = 0,1 < P(B)$ *à accepter .*

Donc $P(A \cup B) = 0,9$ *et* $P(A \cap B) = 0,1$

a) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0.1.$

b) $P(B / A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0.1}{0.7} = 0.14.$

c) $P(B / \overline{A}) = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{P(\overline{A})} = 0.66$

3°) $P(A / \overline{B}) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)}$

$P(A / \overline{B}) = 0.3 \rightarrow P(A \cap B) = 0.49$ à rejeter.

$P(A / \overline{B}) = 0.5 \rightarrow P(A \cap B) = 0.35$ à rejeter.

$P(A / \overline{B}) = 0.7 \rightarrow P(A \cap B) = 0.21$ à accepter.

a) $P(A \cup B) = P(A + P(B) - P(A \cap B) = 0.79$

b) $P(B / A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0.3$

c) $P(\overline{A} / B) = \dfrac{P(B \cap \overline{A})}{P(B)} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = 0.3$

II . 10 :

1°) Par hypothèse : $P(A \cap B) = P(A).P(B).$

a) On doit montrer que : $P(A \cap \overline{B}) = P(A).P(\overline{B}).$

Or :

$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A).P(B)$

$= P(A)\left[1 - P(B)\right] = P(A).P(\overline{B}) \rightarrow$

A et $\overline{B}$ sont indépendants

b)

$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}).P(B).$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A).P(B) =$
$P(B)[1 - P(A)] = P(B).P(\overline{A}) \rightarrow$

B et $\overline{A}$ sont indépendants.

Remarque :

Pour démontrer b), nous pouvons utiliser a) en permutant les rôles des événements A et B.

c) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}).P(\overline{B})$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A).P(B)$$
$$= P(\overline{A}) - P(B)[1 - P(A)] = P(\overline{A}) - P(B).P(\overline{A})$$
$$= P(\overline{A})[1 - P(B)] = P(\overline{A}).P(\overline{B}) \rightarrow$$

$\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

2°) Nous avons par hypothèse :

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$

$P(B \cap C) = P(B).P(C)$ et $P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C)$

$P(A \cap C) = P(A).P(C)$

a) $P(A \cap B \cap \overline{C}) = P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C)$

$$= P(A).P(B) - P(A).P(B).P(C) = P(A).P(B)(1 - P(C))$$
$$= P(A).P(B).P(\overline{C}).$$

A, B et $\overline{C}$ sont indépendants.

b) $P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

$$= P(A)[1 - P(B)] - P(A).P(C)[1 - P(B)]$$
$$= P(A)P(\overline{B}) - P(A)P(C)P(\overline{B})$$
$$= P(A)P(\overline{B})[1 - P(C)] = P(A).P(\overline{B}).P(\overline{C})$$

A, $\overline{B}$ et $\overline{C}$ sont indépendants.

c) $P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}) = 1 - P(A\cup B\cup C)$

$= 1 - P(A) - P(B) - P(C) + P(A\cap B) +$

$(B\cap C) + P(A\cap C) - P(A\cap B\cap C)$

$= P(\overline{A}) - P(B) - P(C) + P(A).P(B) +$

$P(B).P(C) + P(A).P(C) - P(A).P(B).P(C)$

$= P(\overline{A}) - P(B)[1 - P(A)] - P(C)[1 - P(A)] +$

$P(B).P(C)[1 - P(A)]$

$= P(\overline{A}) - P(B).P(\overline{A}) - P(C).P(\overline{A}) + P(B).P(C).P(\overline{A})$

$= P(\overline{A})[1 - P(B)] - P(\overline{A}).P(C)[1 - P(B)]$

$= P(\overline{A})P(\overline{B})[1 - P(C)]P(\overline{A}).P(\overline{B}).P(\overline{C})$

$\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ sont indépendants

Conclusion :

si A, B et C sont 3 événements independants alors quelle que soit la combinaison $(A,\overline{B},\overline{C})$; $(\overline{A},B,\overline{C})$ .... $(\overline{A},\overline{B},\overline{C})$, la propriété d'indépendance est toujours conservée.

3°)

$P(A_1 \cup A_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \cup A_n) = 1 - (1 - P(A_1))$

$(1 - P(A_2))\ldots\ldots(1 - P(A_n))$

nous avons démontré que :

$\overline{A_1 \cup A_2 \ldots\ldots\ldots \cup A_n} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots\ldots\ldots\ldots \cap \overline{A}_n \Leftrightarrow$

$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i$

Comme $\overline{A}_1 . \overline{A}_2 \ldots\ldots\ldots \overline{A}_n$ sont mutuellement indépendants on a : $P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \ldots\ldots\ldots \cap \overline{A}_n) = P(\overline{A}_1).P(\overline{A}_2)\ldots\ldots P(\overline{A}_n)$.

Donc

$$P(A_1 \cup A_2 \ldots\ldots\ldots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \ldots\ldots \cup A_n})$$
$$1 - P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \ldots\ldots\ldots \cap \overline{A}_n)$$
$$= 1 - P(\overline{A}_1).P(\overline{A}_2)\ldots\ldots P(\overline{A}_n)$$
$$= 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_1))\ldots\ldots(1 - P(A_n))$$

II .11 :

1°)A et B incompatibles

$\rightarrow A \cap B = \phi \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) \rightarrow$ $\boxed{p = 0.4}$

2°) A et B indépendants

$\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow$

$0,7 = 0,3 + p - 0,3p \rightarrow$ $\boxed{p = \frac{4}{7} \approx 0,57}$

3°)

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7$

b) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{9}{70}$

c) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0.3$

d) $P(\overline{A} \cap B \cup A \cap \overline{B}) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{37}{70}$

e) $P(A \cap B \cup \overline{B} \cap \overline{A}) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$

$$= P(A \cap B) + 1 - P(A \cup B) = \frac{33}{70}$$

4°

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{5.8}{7}$ $P(A \cup \overline{B}) = 0.601$ $P(\overline{A} \cup B) = 0.871$

$P(A \cap \overline{B}) = 0.129$ $P(\overline{A} \cap B) = 0.399$ $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.301$

$P(\overline{A} / B) = \frac{0.129}{0.57} = 0.22$ $P(B / \overline{A}) = 0.57$ $P(\overline{A} / \overline{B}) = 0.61$

II . 12 :

Nous pouvons résumer l'ensemble des résultats possibles dans le tableau suivant :

2ème dé / 1er dé	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Nous avons :

$P(A_1) = \frac{1}{2}$; $P(A_2) = \frac{1}{2}$; $P(A_3) = \frac{1}{2}$

1°) $P(A_1 \cap A_3) = P($la Σ des 2 dés est paire et le 2ème dé présente une face paire)

= P (Le 1er dé présente une face paire $\cap$ le 2ème dé présente une face paire)

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}.$$

$P(A_1 \cap A_2) = P$ (Le 1er dé présente une face impaire $\cap$ le 2ème dé présente face impaire)

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}.$$

$P(A_2 \cap A_3) = P$(Le 1er dé présente une face impaire $\cap$ le 2ème dé présente face paire)

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}.$$

Ainsi (A_1, A_2);(A_1, A_3) et (A_2, A_3) sont indépendants

2°) $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ = La $\sum$ est paire et le premier dé présente une face impaire alors que le 2ème dé présente une face paire $\Rightarrow$ événement impossible

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\phi) = 0 \rightarrow$

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0 \neq P(A_1 \cap A_2).P(A_3) \rightarrow$

$A_1 \cap A_2$ et A_3 ne sont pas indépendants

3°) Ce même raisonnement, nous conduit à :

$P(A_1 \cap A_3 \cap A_2) = 0 \rightarrow A_1 \cap A_3$ et A_2 ne sont pas indépendants.

4°) $(A_1 \cup A_3) \cap A_2$ $\rightarrow$ La $\sum$ est paire ou le 2ème dé présente une face paire et le premier dé présente une face impaire $\rightarrow$ Les 2 dés presentent une face impaire.

$$P\left[(A_1 \cup A_3) \cap A_2\right] = P\left[A_1 \cap A_2 \cup A_2 \cap A_3\right] = \frac{1}{2}$$

$$P(A_1 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_3) = \frac{3}{4}$$

$$P\left[(A_1 \cup A_3) \cap A_2\right] \neq P\left[A_1 \cup A_3\right].P(A_2) \rightarrow$$

$A_1 \cup A_3$ et A_2 ne sont pas indépendants

5°) Ce même raisonnement; nous conduit à ; $(A_1 \cup A_2)$ et A_3 ne sont pas independants

II . 13 :

Soit P= l'événement avoir une fois pile.

PP = L'événement avoir deux fois piles...

1°) pp peut se produire avec le 1er type de pièce ou avec le 2ème type de pièce (pièce anormale) $\rightarrow$ pp = $(pp \cap N) \cup (pp \cap \overline{N})$

N = La pièce tirée est une pièce normale.

$\overline{N}$= La pièce tirée est une pièce anormale.

Nous avons :

$$P(N) = \frac{3}{4}; \quad P(\overline{N}) = \frac{1}{4}$$

$$P(pp) = P(pp \cap N) + P(pp \cap \overline{N})$$

$$= P(pp / N).P(N) + P(pp / \overline{N}).P(\overline{N})$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.+1.1.\frac{1}{4} = \frac{7}{16}$$

$$(pp) = \frac{7}{16}$$

2) La possibilité d'avoir 2 fois faces notée P(FF) est donnée par :

$$P(FF) = P(FF \cap N) = P(FF / N).p(N) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{4} = \frac{3}{16}.$$

$$P(FF) = \frac{3}{16}$$

3°) Le probabilité d'avoir pile et face ou face et pile est donnée par

$$P(pF \cup Fp) = P(pF \cap N) + P(Fp \cap N) = \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{6}{16}.$$

$$P(pF \cup Fp) = \frac{6}{16}$$

Remarque :

$$P(pF \cup Fp) = 1 - P(pp) - P(FF)$$

$$1 - \frac{7}{10} - \frac{3}{16} = \frac{6}{16}$$

II . 14:

1°) Nombre de cas possibles d'acheter 2 billets parmi n est donnée par : $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$

Nombre de cas favorables d'avoir au moins un billet gagnant est donné par :

$$C_5^1 . C_{n-5}^1 + C_5^2 . C_{n-5}^0 = 5n - 15.$$

$$P(\text{ d'avoir au moins un billet gagnant}) = \frac{10(n-3)}{n(n-1)}$$

Remarque :

P (d'avoir au moins un billet gagnant) = P (de ne pas avoir 2 billets perdants)

$$= 1 - \frac{C_{n-5}^2}{C_n^2} = \frac{10(n-3)}{n(n-1)}$$

2°) Un raisonnement analogue nous conduit à :

$$P \text{ (d'avoir les 5 billets gagnants)} = 1 - \frac{C_{n-5}^k}{C_n^2}$$

$$= 1 - \frac{\frac{(n-5)!}{k!(n-5-k)!}}{\frac{n(n-1)}{2}} = 1 - \frac{2(n-5)(n-6)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(n-5-k+1)}{K!n(n-1)}$$

II . 15 :

soient B = L'événement avoir au moins un six en 4 coups.

$\overline{B}$ = L'événement ne pas avoir un six en 4 coups.

$$P(\overline{B}) = \frac{5}{6}.\frac{5}{6}.\frac{5}{6}.\frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,48$$

$$P(B) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,52$$

C = L'événement avoir au moins un deux six en 20 coups

$\overline{C}$= L'événement ne pas avoir un deux six en 20 coups.

$$P(\overline{C}) = \left(\frac{35}{36}\right)^{20} \rightarrow P(C) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{20} = 0,43 \rightarrow$$

$$\boxed{P(B) > P(C)}$$

II . 16 :

1°) Tirage sans remise :

a) $C_N^n = \dfrac{N!}{n!(N-n)!}$

b) $C_{N-1}^{n-1} = \dfrac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!}$

c) $P(p_i \in \text{l'échantillon}) = \dfrac{C_{N-1}^{n-1}}{C_N^n} = \dfrac{n}{N}$

2°) Tirage Avec Remise :

a) $C_{N+n-1}^{n} = \dfrac{(N+n-1)!}{n!(N-1)!}$

b) $C_{(N+n-1)-1}^{n-1} = C_{N+n-2}^{n-1} = \dfrac{(N+n-2)!}{(n-1)!(N-1)!}$

c) $P(p_i \in \text{l'échantillon}) = \dfrac{C_{N+n-2}^{n-1}}{C_{N+n-1}^{n}} = \dfrac{n}{N+n-1}$

II.17 :

Soient les événements :

S = L'étudiant a échoué en Statistiques.

M = L'étudiant a échoué en Mathématiques.

Nous avons : P(S) = 0,4 ; P(M)=0,5 et P(S $\cap$ M) = 0,25

1°) $P(\overline{S}/M) = \dfrac{P(\overline{S} \cap M)}{P(M)} = \dfrac{P(M) - P(S \cap M)}{P(M)} = 0.3$

2°) $P(\overline{M}/\overline{S}) = \dfrac{P(\overline{M} \cap \overline{S})}{P(\overline{S})} = \dfrac{P(\overline{M \cup S})}{P(\overline{S})} = \dfrac{7}{12}$

3°) $P(M/S) = \dfrac{P(M \cap S)}{P(S)} = \dfrac{5}{8}$

4°) $p(M \cup S) = P(M) + P(S) - P(M \cap S) = 0.65$

5°) $P(M \cup S) - P(M \cap S) = 0.4$

II . 18 :

1°) La boule n°1 peut entrer dans l'une des 10 cases qui s'offrent à elle avec une probabilité équiprobable $= \dfrac{1}{10} \Rightarrow$

P (boule n°1 dans la case n°1) $= \dfrac{1}{10}$.

2°) La boule n°2 entre dans la case n° 2 avec une probabilité $\dfrac{1}{10}$; la boule n°4 a le choix entre 9 cases, donc la probabilité est $\dfrac{1}{9}$; pour la boule n°6 la probabilité est $\dfrac{1}{8}$ etc.

P (les boules paires entrent dans leur cases respectives) $= \dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{1}{9} \cdot \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{1}{7} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{30240}$.

3°) En poursuivant le même raisonnement pour chacune des 10 boules ; on obtiendrait :

P (chacune des boules retrouve la case portant son numéro $= \dfrac{1}{10!}$

4°) Probabilité cherchée est nulle.

II . 19 :

Dénombrons les moyens d'obtenir pour total 12, 13 ou 14 à l'aide des 3 dés :

TOTAL 12	NOMBRE DE CAS	TOTAL 13	NOMBRE DE CAS	TOTAL 14	NOMBRE DE CAS
1,5,6	$P_3 = 6$	166	$C_3^2 = 3$	266	$C_3^2 = 3$
255	$C_3^2 = 3$	256	$P_3 = 6$	356	$P_3 = 6$
264	$P_3 = 6$	346	$P_3 = 6$	446	$C_3^2 = 3$
336	$C_3^2 = 3$	355	$C_3^2 = 3$	455	$C_3^2 = 3$
345	$P_3 = 6$	436	$P_3 = 6$	563	$P_3 = 6$
444	$C_3^3 = 1$	445	$C_3^2 = 3$		
Total	**25**		**27**		**21**

$$\left.\begin{aligned} P(A) &= P(que \quad A \quad gagne) = \frac{25}{216} \\ P(B) &= P(que \quad B \quad gagne) = \frac{27}{216} \\ P(C) &= P(que \quad C \quad gagne) = \frac{21}{216} \end{aligned}\right\} \rightarrow P(B) > P(A) > P(C) \rightarrow$$

Ce jeu n'est pas équitable.

II. 20:

Nombre de dispositions possibles est $2^5 = 32$.

1°) $P(A) = \dfrac{C_5^4 + C_5^5}{2^5} = \dfrac{6}{36}$

2°) $P(B) = \dfrac{C_5^2 + C_5^3}{2^5} = \dfrac{20}{32}$

Ce jeu n'est pas équitable.

II . 21 :

$P(A) = 0.7$; $P(B) = 0.4$; $P(C) = 0.6$

A,B,C sont des événements mutuellement indépendants.

1°) $P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C) = 0.168.$

2°) $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{A}.)P(\overline{B}).P(\overline{C}) = 0.072$

3°) $P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap B \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$

$= P(A).P(\overline{B}).P(\overline{C}) + P(\overline{A}).P(B).P(\overline{C}) + P(\overline{A}).P(\overline{B})$

$P(C) = 0.324$

4°) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A).P(B)$
$-P(A).P(C) - P(B).P(C) + P(A).P(B).P(C) = 0.928$

5°) $P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(A).P(\overline{B}).P(\overline{C}) = 0.168$

6°) $P[(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)] = P(A \cap B)$
$+P(A \cap C) + P(B \cap C) - 2P(A \cap B \cap C) =$
$P(A).P(B) + P(A).P(C) + P(B).P(C) - 2P(A).P(B)/P(C)$

$= 0.604$

II . 22 :

Soient les événements :

b_i = Tirer une boule blanche au $i^{ème}$ tirage.

N_i = Tirer une boule noire au $i^{ème}$ tirage.

$$P(b_1) = \frac{y}{x} = \frac{1}{4} \rightarrow 4y = x$$

$$P(b_1 N_2) = \frac{y}{x}.\frac{x-y}{x-1} = \frac{1}{5} \rightarrow \frac{x-y}{x-1} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{3y}{4y-1} = \frac{4}{5} \rightarrow 15y = 16y - 4 \rightarrow y = 4 \text{ et } x = 16$$

Donc 16 boules dont
- 4 blanches
- 12Noires

II . 23 :

x boules
- 5 blanches
- x-5 Noires

1°)

$$\frac{C_5^1 C_{x-5}^1}{C_x^2} = \frac{5(x-5)}{x(x-1)} = \frac{5}{18} \rightarrow$$

$18.5(x-5) = 5x(x-1)$

$18x - 90 = x^2 - x \rightarrow x^2 - 19x + 90 = 0$

$= 9$ ou 10 boules

2°)

$$\frac{5}{x}.\frac{(x-5)}{x} = \frac{5}{18} \rightarrow \frac{5(x-5)}{x^2} = \frac{5}{18} \rightarrow x^2 - 18x + 90 = 0$$

$\Delta' < 0$ et le problème n'admet pas de solutions.

II. 24 :

Soient les événements :

B_1 = Tirer une boule blanche de l'urne 1:

$$P(B_1) = \frac{3}{8}; \qquad P(\overline{B}_1) = \frac{5}{8}$$

B_2 = Tirer une boule blanche de l'urne 2 :

$$P(B_2) = \frac{2}{5}; \qquad P(\overline{B}_2) = \frac{3}{5}$$

1°) $P(B_1 \cap B_2) = \frac{3}{8}.\frac{2}{5} = \frac{6}{40} = p_1$

2°) $P(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2) = \frac{5}{8}.\frac{3}{5} = \frac{15}{40} = p_2$.

3°) $P\left[(B_1 \cap \overline{B}_2) \cup (\overline{B}_1 \cap B_2)\right] = \frac{3}{8}.\frac{3}{5} + \frac{2}{5}.\frac{5}{8} = \frac{19}{40} = p_3$

4°) Considérons les événements :

E_1 = La boule blanche provienne $U_1 \rightarrow P(E_1) = \frac{3}{8}$

E_2 = Une boule tirée est blanche et l'autre ne l'est pas.

$P(E_2) = P_3 = \frac{19}{40}$.

on cherche à calculer :

$$P(E_1 / E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{\frac{19}{40}}$$

$P(E_1 \cap E_2)$ =P(tirer blanche de U_1 et non blanche de U_2) =

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{40} \rightarrow P(E_1 / E_2) = \frac{\frac{9}{40}}{\frac{19}{40}} = \frac{9}{19}.$$

II. 25 :

A et B sont deux événements indépendants.

P (A) = 0,8 ; P (B) = 0,9 et

$P(A \cap B) = P(A).P(B) = 0.72$

1°) L'événement complémentaire est que la cible ne soit pas atteinte.

P (que la cible soit atteinte au moins une fois) =

1 - P (que la cible soit ratée pendant les 4 coups) =

1-0,2 x 0.2 x 0.1 x 0,1 = 0,9996

2°) P (que la cible soit atteinte une seule fois) =

$$P\left[(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})\right] = P(A).P(\overline{B}) + P(B).P(\overline{A})$$

$$= 0,8.0,1 + 0,9.0,2 = 0,26.$$

P (que ce soit A qui ait atteint la cible) $= \frac{0.08}{0.26} = \frac{4}{13}$.

3°) 1-P (que la cible soit ratée /A tire deux fois) = 0,9999

$1 - (0.2)^2 (0.1)^n \geq 0.9999 \rightarrow n = 3.$

4°) 1-P (que la cible soit ratée /A tire une seule fois) = 0,999

$$1-(0.2).(0.1)^{n} \geq 0.999 \rightarrow n = 3$$

II . 26 :

1°) $C_8^4 = \dfrac{8\,!}{4\,!4\,!} = 70$ réponses.

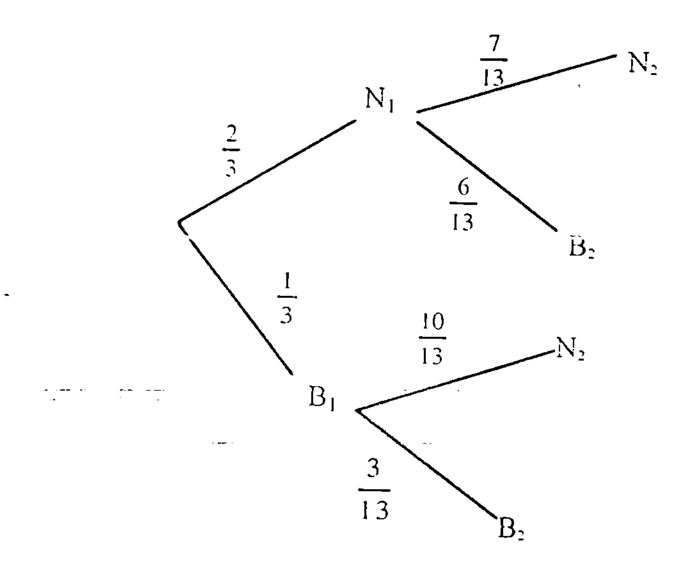
2°) $p = \dfrac{C_4^2 C_4^3}{C_8^4} = \dfrac{24}{70} = \dfrac{12}{35}$

II. 27 :

12 boules — 8 Noires / 4 blanches

I)

La première boule tirée peut être noire ou blanche.
soient :
N_i = La boule tirée au $i^{ème}$ tirage est noire
B_i = La boule tirée au $i^{ème}$ tirage est blanche.
Nous avons l'arbre suivant :



1°)

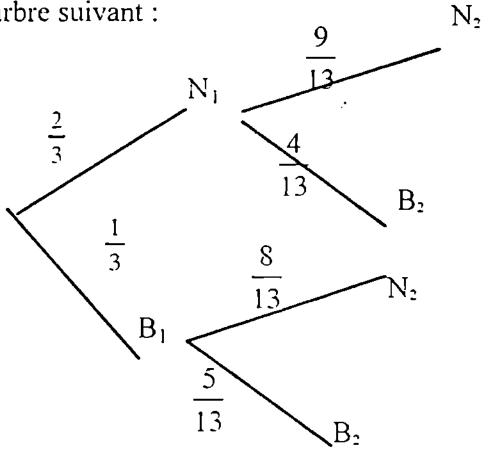
$$P(N_2) = P(N_1).P(N_2 / N_1) + P(B_1).P(N_2/B_1)$$
$$= \frac{2}{3}.\frac{7}{13} + \frac{1}{3}.\frac{10}{13} = \frac{24}{39}.$$

2°) P (2 boules soient de la même couleur) :

$$= P(N_1).P(N_2 / N_1) + P(B_1).P(B_2 / B_1)$$
$$= \frac{2}{3}.\frac{7}{13} + \frac{1}{3}.\frac{3}{13} = \frac{17}{39}$$

II :

Nous avons l'arbre suivant :



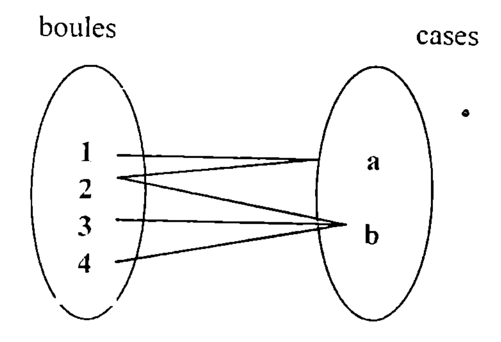
1°)

$$P(N_2) = P(N_1).P(N_2 / N_1) + P(B_1).P(N_2 / B_1)$$
$$= \frac{2}{3}.\frac{9}{13} + \frac{1}{3}.\frac{8}{13} = \frac{26}{39}$$

2°) P (pour que2 boules soient de la même couleur)

$$P(N_1).P(N_2 / N_1) + P(B_1).P(B_2 / B_1).$$
$$\frac{2}{3}.\frac{9}{13} + \frac{1}{3}.\frac{5}{13} = \frac{23}{39}$$

II . 28 :



Ω est l'e emble d'applications d'un ensemble E dans F.
1°) $|\Omega$ $2^4 = 16$ événements élémentaires.

a a	a a a b	a a b b	a b b b
b o b	b b b a	b b a a	b a a a
a b a b	a b b a	a a b a	a b a a
b a b a	b a a b	b b a b	b a b b

L'événement a b b a signifie que la boule n°1 est dans la case a; la boule n°2 est dans la case b etc.....

2°) Soit A= nombre de boules dans a.

$$P(A = 0) = \frac{1}{16}$$

3°) $P(A \geq 1) = 1 - P(A = 0) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{15}{16}$.

4°) a) Soit N = Résultat nul
2 possibilités ou bien a b b a ou b a a b

1 2 3 4 — 1 2 3 4
5 — 5
5 — 5

Donc $P(N) = P[(abba) \cup (baab)] = \frac{2}{16}$

b) Soit p = Résultat positif

7 possibilités a a a a ; a a a b; a a b a ; a b a a ;
b a b a ; b b a a ; b a a a.

$$P(p) = \frac{7}{16}$$

II . 29 :

$$1°)\ \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

$$2°)\ \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$3°)\ \frac{(n-m+1)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(n-m+2)}$$

II . 30 :

Pour n =2 :

E = {(F,F); (F,P) (P,F) (P,P)}.

A= {(F,P); (P,F) (P,P)}

B= {(F,P);(P,F)}

P(A) =; P(B) = et

Comme $P(A \cap B) \neq P(A).P(B)$

Les événements A et B ne sont pas indépendants dans le cas où n = 2 jets.

2°) Pour n = 3

E= {(FFF); (F F P); (F P F); (P F F) ;

(F P P); (P F P); (P P F); (P P P)}

A= {(F P P); (P F P) ; (P P F); (P P P)}

B= {(F F P); (F P F); (P F F) ; (F P P);
(P F P); (P P F)}.

$(A \cap B) = \{(F,P,P)(P,F,P)(P,P,F)\}$

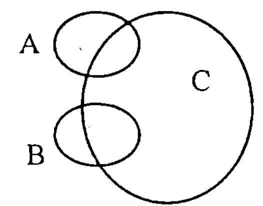
$P(A) = \frac{1}{2}; \quad P(B) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}; \quad P(A \cap B) = \frac{3}{8}$

$P(A \cap B) = P(A).P(B) \rightarrow$

Les événements A et B sont indépendants dans le cas de n = 3 jets.

II .31 :

Nous pouvons faire la représentation graphique suivante :



Nous avons

$$P[(A \cup B)/C] = \frac{P[(A \cup B) \cap C]}{P(C)} = \frac{P[(A \cap C) \cup (B \cap C]}{P(C)}$$

$$= \frac{P(A \cap C) + P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} + \frac{P(B \cap C)}{P(C)}$$

$$= P(A / C) + P(B / C).$$

Ainsi si A et B sont incompatibles

$P[(A \cup B) / C] = P(A / C) + P(B / C).$

2°) Si $A \cap B \neq 0$

$$P[(A \cup B)/C] = \frac{P[(A \cap C) + P(B \cap C) - (P(A \cap B \cap C)]}{P(C)}$$

$$= \frac{P(A \cap C)}{P(C)} + \frac{P(B \cap C)}{P(C)} - \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)}$$

$$P(A/C) + P(B/C) - P[(A \cap B)/C]$$

Ainsi si A et B sont deux événements non disjoints ;

$$P[(A \cup B)/C] = P[A/C] + P(B/C) - P[(A \cap B)/C]$$

II . 32 :

1°) Faux

Deux événements A et B sont incompatibles si et seulement si $A \cap B = \phi \rightarrow P(A \cap B) = 0 \rightarrow$

$P(A \cap B) = P(A).P(B / A) \neq P(A).P(B)$

sauf si A ou B est l'événement incompatible.

Deux événements incompatibles ne sont donc pas indépendants.

2°) Faux

Réciproquement (à la 1ere question); deux événements indépendants ne sont pas incompatibles.

3°) Faux

$P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) > 1$

Or $0 \leq P(A \cup B) \leq 1 \longrightarrow P(A \cap B) \neq 0 \rightarrow$

Les événements A et B ne sont pas incompatibles.

4°) Faux

La principe des probabilités composées s'enonce :

$P(A \cap B) = P(A).P(B / A) = P(B).P(A / B).$

et $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ seulement si les événements A et B sont indépendants.

5°) Faux

Nous avons P(A)= 0,8 ; P(B)= 0,7

La probabilité que les 2 étudiants échouent est donnée par :

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}).P(\overline{B}) = 0.2.0.3 \neq 0.5$

6°)Faux

P(A) = 0,8 ; P(B)= 0,9

On cherche :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= P(A) + P(B) - P(A).P(B)$$
$$= 0.8 + 0.9 - 0.8.09 \neq 0.92$$

7°) Faux

$A \cap B \cap C$ peut être égale au ϕ et dans ce cas
$P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A).P(B).P(C)$.

II . 33 :

a) $E = \{a,b\} \Rightarrow \quad P(E) = \{f;\{a\};\{b\};\{a,b\}\}$

P (E) est une tribu.

. $A = \{f;\{a,b\}\}$ est une tribu.

b)

$E = \{a,b,c\} \quad \text{card}\, E = 3 \rightarrow \text{card} \quad \mathcal{P}(E) = 2^3 = 8.$

$\mathcal{P}(E) = \{\phi;\{a\};\{b\};\{c\};\{a,b\};\{a,c\};\{b,c\};\{a,b,c\}\}$

$\mathcal{P}(E)$ est une tribu

$\mathcal{A} = \{\phi;\{a,b,c\}\}$ est une tribu

$\mathcal{A} = \{\{a\};\{b,c\};\{a,b,c\};\phi\}$ est une tribu

$\mathcal{A} = \{\{b\};\{a,c\};\{a,b,c\};\phi\}$ est une tribu

$\mathcal{A} = \{\{c\};\{a,b\};\{a,b,c\};\phi\}$ est une tribu

2°)

$\{\{a\};\{b\};\{c\};\{b,c,d,e\};\{a,c,d,e\};\{a,b,d,e\};\{a,b,c,d,e\};\{\phi\}\}$

3°) A n'est pas une tribu puisque :

$$\begin{cases} \phi \subset \mathcal{A} \\ \forall a \in \mathcal{A} \quad \text{alors} \quad \bar{a} \in \mathcal{A} \\ \text{mais} \\ \forall a \in \mathcal{A} \quad \text{et} \, b \in \mathcal{A} \quad ; \\ a \cup b \notin \mathcal{A} \end{cases}$$

II.34 :

1°/ $A_1 \cap A_2$ est une tribu

a/ $\phi \in A_1 \cap A_2$ car $\phi \in A_1$ et $\phi \in A_2$.

b/ $\forall A \in A_1 \cap A_2 \xrightarrow{?} \overline{A} \in A_1 \cap A_2$

$$A \in A_1 \cap A_2 \Rightarrow \begin{matrix} A \in A_1 \rightarrow \overline{A} \in A_1 \\ A \in A_2 \rightarrow \overline{A} \in A_2 \end{matrix} \rightarrow \overline{A} \in A_1 \cap A_2$$

c)

$$A_i ; i = 1 \ldots\ldots n \in A_1 \cap A_2 \xrightarrow{?} \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in A_1 \cap A_2 .$$

$$\bullet \begin{matrix} A_i ; i = 1 \ldots\ldots n \in A_1 \rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in A_1 \\ A_i ; i = \ldots\ldots n \in A_2 \rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in A_2 \end{matrix} \rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in A_1 \cap A_2$$

$A_1 \cap A_2$ est une tribu

2°) Soit $E = \{a,b,c,d,e\}$

$\mathcal{A}_1 = \{\phi;\{a,b,c,d,e\};\{a,b\};\{c,d,e\}\}$ une tribu.

$\mathcal{A}_2 = \{\phi;\{a,b,c,d,e\};\{e\};\{a,b,c,d,\}\}$ une tribu.

$\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \{\phi;\{a,b,c,d,e\};\{a,b\};\{e\};\{c,d,e\};\{a,b,c,d\}\}$.

$A_1 \cup A_2$ n'est pas une tribu puisque :

$\{a,b\} \cup \{e\} = \{a,b,e\} \notin \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$.

Conclusion $A_1 \cup A_2$ n'est pas une tribu.

CHAPITRE III

PROBABILITES DE BAYES

Soit A_1, A_2, ..., A_n Une partition d'un ensemble fondamental E telle que $P(A_i) > 0 \quad \forall_i = 1, \ldots\ldots, n.$. Les événements A_i s'excluent mutuellement (leur intersection deux à deux est le vide) et leur réunion est E .

Soit B un autre événement quelconque . Alors :

$$B = E \cap B = (A_1 \cup A_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \cup A_n) \cap B$$
$$= A_1 \cap B \cup A_2 \cap B \ldots\ldots \cup A_n \cap B.$$

comme les A_i s'excluent mutuellement; alors les $A_i \cap B$ s'excluent aussi mutuellement. Par conséquent :

$$P(B) = P(E \cap B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)$$
$$+ \ldots\ldots + P(A_n \cap B)$$
$$= P(A_1).P(B/A_1)$$
$$+ P(A_2).P(B/A_2) + \ldots\ldots\ldots + P(A_n).P(B/A_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i)$$

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i)}$$

SECTION I : FORMULE DE BAYES

Théorème : Soit $A_1, A_2 \ldots\ldots\ldots, A_n$ une partition de E et B un événement quelconque. Pour tout i $(i = 1, \ldots. n)$ on a alors :

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i).P(B / A_i)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_i).P(B / A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B / A_i)}$$

$$\boxed{P(A_i / B) = \frac{P(A_i).P(B / A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B / A_i)}}$$

SECTION II : DIAGRAMME EN ARBRE :

Nous pouvons représenter les divers événements impliqués dans la formule des probabilités totales et dans la formule de Bayes à l'aide d'un diagramme en forme d'arbre.

L'exemple ci-dessous explique ce programme diagramme

Exmeple :

On donne trois lots tel que :

- Le lot I contient 20 ampoules éléctriques dont 2 défectueuses.
- Le lot II contient 25 ampoules éléctriques dont 5 defectueuses.
- Le lot III contient 30 ampoules éléctriques dont 6 défectueuses.

On choisit un lot au hasard et l'on en extrait une ampoule.

1°) Quelle est la probabilité que l'ampoule tirée soit défectueuse?

2°) Quelle est la probabilité que l'ampoule tirée soit bonne.

3°) On tire une pièce ; elle est défectueuse ; quelle est la probabilité qu'elle provienne du premier lot ?

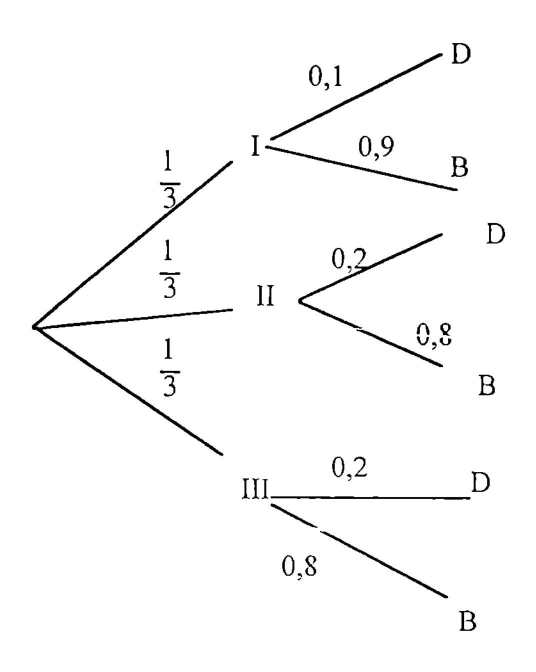
SOLUTION

Là; le phènomène est représenté par deux éxpériences :

a) Choix d'un lot. Comme le choix est arbitaire; la probabilité du choix est égale à $\frac{1}{3}$.$(P(L_1) = P(L_2) = P(L_3) = \frac{1}{3})$

b) le tirage d'une ampoule qui peut être défectueuse (D) ou non défectueuse (B).

Nous pouvons représenter les différents résultats par le diagramme en arbre suivant :



1°) La probabilité de tirer une pièce défectueuse est donnée par $P(D) = \frac{1}{3}.0.1 + \frac{1}{3}.0.2 + \frac{1}{3}.0.2 = \frac{1}{6}$.

2°) La probabilité de tirer une pièce bonne est donnée par :

$$P(B) = \frac{1}{3}.0.9 + \frac{1}{3}.0.8 + \frac{1}{3}.0.8 = \frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{6} = 1 - P(D)$$

3°)

$$P(L_1 / D) = \frac{P(L_1).P(D / L_1)}{P(D)} = \frac{P(D \cap L_1)}{P(D)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}.0.1}{\frac{1}{6}} = \frac{0.6}{3} = \frac{1}{5}.$$

N.B :

$$P(L_2 / D) = P(L_3 / D) = \frac{2}{5}.$$

EXERCICES

III . 1 :

On sait que les jumeaux peuvent être de vrais jumeaux, auquel cas ils sont de même sexe ou de faux jumeaux auquel cas la probabilité qu'ils soient de même sexe sera prise égale à $\frac{1}{2}$. On suppose connue la probabilité p pour que dans une population donnée deux jumeaux soient de vrais jumeaux.

1°) Déterminer en fonction de p la probabilité que deux jumeaux soient de même sexe.

2°) Sachant qu'ils sont de même sexe ; déterminer la probabilité que deux jumeaux soient de vrais jumeaux.

3°) Sachant qu'ils sont de même sexe ; déterminer la probabilité que deux jumeaux soient de faux jumeaux.

III . 2 :

Dans une région donnée; il existe deux facultés. Le taux de réussite dans la première faculté est de 80% ; dans la deuxième faculté ce taux est de 90% . 60% des étudiants sont inscrits dans la première faculté.

1°)Quelle est le pourcentage de réussite sur l'ensemble de la région ?

2°) On choisit un étudiant au hasard; il est parmi les admis, quelle est la probabilité pour qu'il provienne de la 2ème faculté ?

3°) On choisit un étudiant au hasard; il n'est pas admis; quelle est la probabilité pour qu'il provienne de la première faculté ?

III . 3 :

Trois usines U_1 , U_2, et U_3 fabriquent les mêmes pièces. La première usine assure 28% de la production totale; l'usine U_2 en assure 40% et l'usine U_3 en assure 32% . Les pourcentages des pièces déféctueuses sont respectivement de 4 % ; 2% et 3% pour les usines U_1; U_2; et U_3 .

1° Quelle est le pourcentage de pièces défectueuses sur l'ensemble du marché, supposé alimenté par les 3 usines ?

2° On achète une pièce. On constate qu'elle a défectueuse. Calculer la probabilité qu'elle a été fabriquée :

- par l'usine U_1
- par l'usine U_2.
- par l'usine U_3.

3°) On achète une pièce . On constate qu'elle est bonne. Calculer la probabilité qu'elle ait été fabriquée :

- par l'usine U_1
- par l'usine U_2
- par l'usine U_3.

III . 4 :

Les membres du conseil de 25 personnes doivent choisir entre deux options A et B.

Au cours d'un premier débat ; il s'est avéré que 60% d'entre eux étaient partisans de l'option A; tandis que les 40% restant étaient partisants de l'option B.

Depuis lors; 40% des partisans de l'option A et 20% des partisans de l'option B ont changé d'avis et sont devenus partisans de l'option altérnative; l'avis des autres demeurent inchangé.

On tire au hasard un membre de ce conseil.

I) Calculer la probabilité de réalisation de chacun des deux événements suivants :

a) Ce membre est actuellement partisan de l'option A.

b) Ce membre a changé d'avis depuis le premier débat.

II) Sachant qu'il est actuellement partisan de l'option A; calculer la probabilité de réalisation de chacun des deux événements suivants :

a) Ce membre était déjà partisan de l'option A lors du premier débat .

b) Ce membre a changé d'avis depuis le premier débat.

III . 5 :

Un individu A dont on ne sait pas s'il triche ou non, tire une carte d'un jeu de 52 cartes. Il obtient un roi.

Sachant qu'un tricheur a une chance sur deux de tirer un roi et sachant qu'un individu sur dix est un tricheur, quelle est la probabilité pour que A soit un tricheur?

III. 6 :

Soient 2 urnes U_1 et U_2 contenant des boules de 2 couleurs.

L'urne U_1 contient b_1 boules blanches et r_1 boules rouges.

L'urne U_2 contient b_2 boules blanches et r_2 boules rouges.

La probabilité de choisir U_1 et p_1.

La probabilité de choisir U_2 et p_2.

On efféctue des tirages avec remise.

1°) Calculer la probabilité que la 1ère boule tirée soit rouge.

2°) Calculer la probabilité pour que la $2^{éme}$ boule tirée soit rouge sachant que la 1ère l'était.

3°) Quelle est la probabilité que l'urne utilisée a été la 1ère sachant que la première boule était blanche.

III . 7 :

Dans un magasin se trouvent quatre lots de pièces dont les proportions de pièces déféctueuses sont 5% ; 5% , 8% et 10%. Les étiquettes précisant la qualité des lots ont été perdues.

On prelève, dans l'un des lots choisi au hasard, un échantillon de 10 pièces, 2 pièces sont défectueuses. Quelle est la probabilité pourque ce lot contienne 5% des pièces défectueuses?

III . 8 :

Une école supèrieure est composée de 4 grandes salles S_1 : S_2: S_3et S_4 .

S_1 contient 25% des étudiants dont 50% sont des jeunes filles.

S_2 contient 35% des étudiants dont 40% sont des jeunes filles

S_3 contient 30% des étudiants dont 60% sont des jeunes filles

S_4 contient 10% des étudiants dont 30% sont des jeunes filles

On choisit dans le hall une jeune fille et un garçon.

1°) Quelle est la probabilité pour que la jeune fille sorte de S_1

2°) Quelle est la probabilité pour que le garçon sorte de S_4

III . 9 :

On considére deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient 4 boules rouges et deux boules blanches. L'urne U_2 contient deux boules rouges et quatres boules blanches. On lance un dė bien équilibré.

- Si on obtient un nombre « pair » on décide de prendre une boule de U_1.

- Si on obtient un nombre « impair » on décide de prendre une boule de U_2..

Calculer :

1°) La probabilité d'obtenir une boule rouge.

2°) La probabilité d'obtenir une boule blanche.

3°) La probabilite d'obtenir une boule rouge au troisième coup sachant que l'on a déjà obtenu cette couleur aux deux premiers coups.

III . 10 :

Une boîte contient trois pièces de monnaie. Une des pièces est bien équilibrée; une autre est marquée avec deux faces et la troisième est truquée de façon que la probabilité d'avoir face est égale à $\frac{1}{4}$.

On choisit une pièce au hasard et on la lance. Si l'on obtient face; on lance la pièce de nouveau; si l'on obtient pile ; on choisit l'une des deux autres pièces et on la lance.

1°) Schématiser les différents résulats à l'aide d'un diagramme en arbre.

2°) Calculer la probablilité pour que l'on obtienne « face » deux fois.

3°) Calculer la probablité pour que l'on obtienne « pile » deux fois.

4°) Si l'on jette deux fois la même pièce; calculer la probabilité pour qu'elle soit la pièce marquée avec deux faces.

SOLUTIONS PROPOSEES

III . 1 :

1°) Soient

A = Les 2 jumeaux sont de vrais jumeaux

$\overline{A}$ = Les 2 jumeaux sont de faux jumeaux.

$P(A) = p \rightarrow P(\overline{A}) = 1 - p = q$

B = Les 2 jumeaux sont de même sexe.

Nous avons :

$$P(B / A) = 1 \quad ; \quad P(B / \overline{A}) = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = P\left[(B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})\right] = P(B / A).P(A) + P(B / \overline{A}).P(\overline{A})$$

$$= p + \frac{1}{2}(1 - p) = \frac{p + 1}{2}$$

2°)

$$P(A / B) = \frac{P(A).P(B / A)}{P(A).P(B / A) + P(\overline{A}).P(B / \overline{A})} = \frac{2p}{p + 1}$$

3°) 1ère méthode

$$P(\overline{A} / B) = \frac{P(\overline{A}).P(B / \overline{A})}{P(A).P(B / A) + P(\overline{A}).P(B / \overline{A})} = \frac{1 - p}{1 + p} = \frac{q}{1 + p}$$

2ème méthode

$$P(\overline{A} / B) = 1 - P(A / B) = 1 - \frac{2p}{p + 1} = \frac{q}{p + 1}$$

III. 2 :

Nous avons deux facultés F_1 et F_2.

Soient les événements :

A : L'étudiant choisi est admis.

F_1 : L'étudiant provient de la premiere faculté.

F_2 : L'étudiant proveint de la deuxième faculté.

Nous avons :

$P(A / F_1) = 0{,}8$; $P(A / F_2) = 0{,}9$

$P(F_1) = 0{,}6$; $P(F_2) = 0{,}4$

1°) $P(A) = P(A \cap F_1 \cup A \cap F_2) = P(F_1).P(A / F_1)$
$+P(F_2)P(A / F_2) = 0{,}6.0{,}8 + 0{,}4.0{,}9 = 0{,}84$

$$\boxed{P(A) = 84\%}$$

2°) $P(F_2 / A) = \dfrac{P(F_2).P(A / F_2)}{P(A)} = \dfrac{0{,}4.0{,}9}{0{,}84} \cong 0{,}428$

3°) $P(F_1 / \overline{A}) = \dfrac{P(F_1).P(\overline{A} / F_1)}{P(\overline{A})} = \dfrac{0.6.0.2}{0.16} = 0.75$

III . 3 :

Soit A (respectivement B et C) = La pièce tirée a été fabriquée par l'usine U_1 (respectivement U_2 et U_3)

Nous avons : $P(A) = 0{,}28$; $P(B) = 0{,}4$; $P(C) = 0{,}32$

1°) Soit D « La pièce tirée est défectueuse »

$p(D / A) = 0{,}04$; $P(D / B) = 0{,}02$; $P(D / C) = 0{,}03$

$$\begin{aligned} P(D) &= P[(D \cap A) \cup (D \cap B \cup D \cap C)] \\ &= P(D / A).P(A) + P(D / B).P(B) + P(D / C).P(C) \\ &= 0{,}04.028 + 0{,}02.0{,}4 + 0{,}03.0{,}32 \\ &= 0{,}0288 \quad \text{soit} 2{,}88\% \end{aligned}$$

$$\boxed{P(D) = 2{,}88\%}$$

2°) Les probabilités demandées sont $P(A / D)$; $P(B / D)$ et $P(C / D)$

$$P(A / D) = \frac{P(D / A).P(A)}{P(D)} = \frac{0{,}04.0{,}28}{0{,}0288} = 0.388$$

$$P(B/D) = \frac{P(D/B).P(B)}{P(D)} = \frac{0{,}02.0{,}4}{0{,}0288} = 0.277$$

$$P(C/D) = 1 - P(A/D) - P(B/D) = \frac{0{,}04.0{,}28}{0{,}0288} = 0.345$$

3°) Soit B_0 = La pièce tirée est bonne :

$$P(B_0) = P(B_0/A).P(A) + P(B_0/B).P(B) + P(B_0/C).P(C)$$

$$= 0.96.028 + 0.98.0.4 + 0.97.0.32$$

$$= 97.12\% = 1 - P(D)$$

Les probabilités demandées sont :

$$P(A/B_0) = \frac{P(B_0/A).P(A)}{P(B_0)} = \frac{0{,}96.0{,}28}{0{,}9712} = 0{,}277$$

$$P(B/B_0) = \frac{P(B_0/B).P(B)}{P(B_0)} = \frac{0{,}98.0{,}4}{0{,}9712} = 0{,}403$$

$$P(C/B_0) = \frac{P(B_0/C).P(C)}{P(B_0)} = \frac{0{,}97.0{,}32}{0{,}9712} = 0{,}320$$

$$= 1[P(A/B_0) + P(B/B_0)]$$

III.4 :

Si on note les événements :

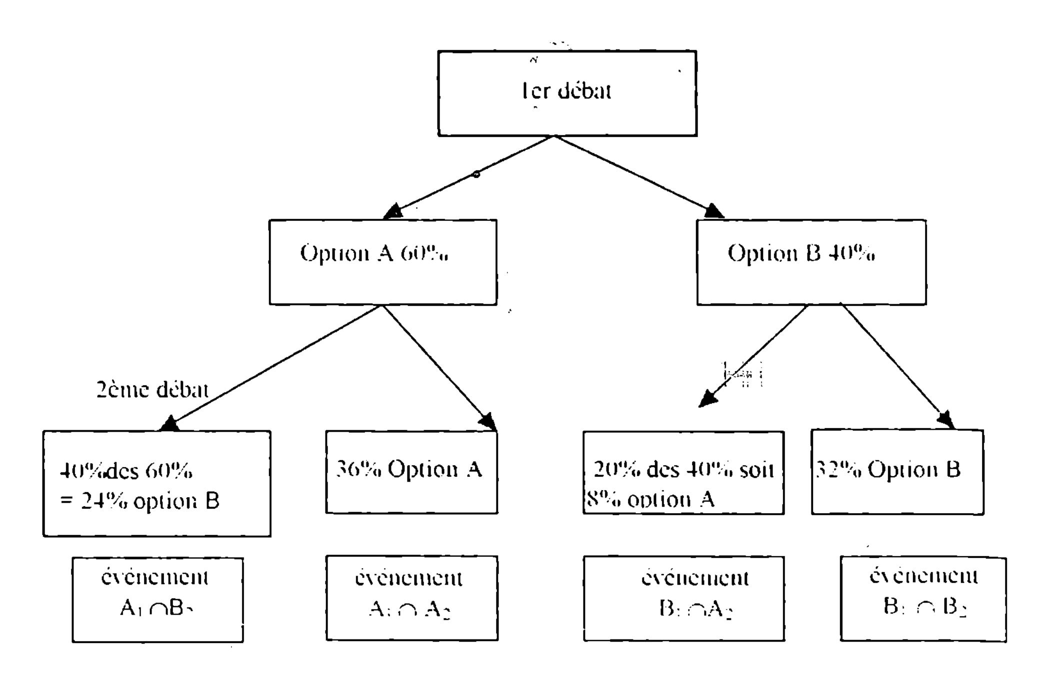
A_1 = être partisan de l'option A au cours du 1er débat

A_2 = être partisan de l'option A au cours du 2ème débat

B_1 = être partisan de l'option B au cours du 1er débat

B_2 = être partisan de l'option B au cours du 2ème débat

Nous pouvons schématiser les résultats de la façon suivante :



I :

a) Ce membre est actuellement partisan de l'option A; c'est :

$$P\left[(A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap A_2)\right] = P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap A_2)$$

$$= 36\% + 8\% = 44\% = P(A_2)$$

b) Ce membre a changé d'avis, c'est :

$$P\left[(A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap A_2)\right] = P(A_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap A_2)$$

$$= 24\% + 8\% = 32\%$$

N.B : Nous pouvons vérifier que : $P(B_2) = 56\%$ et

P (n'a pas changé d'avis) = 68%

$= P\left[(A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2)\right]$

II :

a) $P(A_1 / A_2) = \dfrac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \dfrac{36}{44} = \dfrac{9}{11}$

b) $P(B_1 / A_2) = \dfrac{P(A_2 \cap B_1)}{P(A_2)} = \dfrac{2}{11} = 1 - P(A_1 / A_2)$

III . 5 :

Soient les événements :

T = L'individu est un tricheur

R = Carte tirée est un roi.

Nous avons :

$P(T) = \dfrac{1}{10}$; $P(\overline{T}) = \dfrac{9}{10}$; $P(R / T) = \dfrac{1}{2}$; $P(R / \overline{T}) = \dfrac{1}{13}$.

On demande de calculer

$$P(T / R) = \frac{P(T \cap R)}{P(R)}$$

$$P(T \cap R) = P(R / T).P(T) = \frac{1}{10}.\frac{1}{2} = \frac{1}{20}$$

$$P(R) = P(R \cap T) + P(R \cap \overline{T})$$

$$= P(R / T).P(T) + P(R / \overline{T}).P(\overline{T})$$

$$= \frac{1}{20} + \frac{9}{10}.\frac{1}{13}$$

$$\boxed{P(T / R) = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{20} + \frac{9}{130}} = \frac{13}{31}}$$

III.6 :

Soient les événements :

R_i (Respectivement B_i) « obtenir une boule rouge (respectivement blanche) au ième tirage ».

U_1 = « choisir l'urne U_1 »

U_2 = «choisir l'urne U_2 »

1°) $R_1 = \left[R_1 \cap U_1\right] \cup \left[R_1 \cap U_2\right]$

Les événements $\left[R_1 \cap U_1\right]$ et $\left[R_1 \cap U_2\right]$ sont incompatibles ($U_1 \cap U_2 = \phi$). Donc :

$$P(R_1) = P(R_1 \cap U_1) + P(R_1 \cap U_2)$$

$$= P(R_1 / U_1).P(U_1) + P(R_1 / U_2).P(U_2) \rightarrow$$

$$\boxed{P(R_1) = \frac{r_1}{b_1 + r_1} p_1 + \frac{r_2}{b_2 + r_2} p_2}$$

2°)

$$p(R_2 / R_1) = \frac{P(R_2 \cap R_1)}{P(R_1)}$$

Or

$$R_2 \cap R_1 = (R_2 \cap R_1 \cap U_1) \cup (R_1 \cap R_2 \cap U_2)$$

$$P(R_2 \cap R_1) = P(R_1 \cap R_2 / U_1)P(U_1) + P(R_1 \cap R_2 / U_2)P(U_2)$$

$$= \left(\frac{r_1}{b_1 + r_1}\right)^2 \cdot p_1 + \left(\frac{r_2}{b_2 + r_2}\right)^2 p_2$$

Donc:

$$p\left(R_2 / R_1\right)=\frac{\left(\frac{r_1}{b_1+r_1}\right)^2 p_1+\left(\frac{r_2}{b_2+r_2}\right)^2 p_2}{\frac{r_1}{b_1+r_1} p_1+\frac{r_2}{b_2+r_2} p_2}.$$

3°)

$$P(U_1 / B_1)=\frac{P(B_1 / U_1).P(U_1)}{p(B_1)}=\frac{\frac{b_1}{b_1+r_1}.p_1}{\frac{b_1}{b_1+r_1} p_1+\frac{b_2}{b_2+r_1} p_2}$$

III .7 :

Nous avons trois types de lots :

A_1 = Le lot considéré contient 5% des pièces défectueuses.

A_2 = Le lot considéré contient 8% des pièces défectueuses.

A_3 = Le lot considéré contient 10% des pièces défectueuses.

avec $P(A_1)=\frac{1}{2}$; $P(A_2)=\frac{1}{4}=P(A_3)$.

$P(D_2 / A_1)=C_{10}^2(0.05)^2(0,95)^8=0,0746=P($d'avoir 2 pièces defectueuses / sachant que le lot est de type $A_1)$

$$P(D_2 / A_1)=\frac{P(D_2 \cap A_1)}{P(A_1)}=2P(D_2 \cap A_1)$$

$$P(D_2/A_2) = C_{10}^2(0.08)^2(0.92)^8 = 0.1478 = 4P(D_2 \cap A_2)$$

$$P(D_2/A_3) = C_{10}^2(0.10)^2(0.9)^8 = 0.1937 = 4P(D_2 \cap A_3)$$

D'où

$$P(A_1/D_2) = \frac{P(D_2/A_1).P(A_1)}{P(D_2/A_1).P(A_1) + P(D_2/A_2).P(A_2) + P(D_2/A_3).P(A_3)}$$

$$= \frac{2.P(D_2/A_1)}{2P(D_2 \cap A_1) + P(D_2 \cap A_2) + P(D_2 \cap A_3)} = 0.304$$

Remarque :

Nous pouvons vérifier que :

$P(A_2/D_2) = 0{,}30$; $P(A_3/D_2) = 0{,}395$.

III . 8 :

Soient les événements :

S_i « l'individu choisi sort de la salle S_i » $i = 1,2,3,4$.

Soit

F « L'individu choisi est une jeune fille »

G « L'individu choisi est un garçon »

1°)

$F = (F \cap S_1) \cup (F \cap S_2) \cup (F \cap S_3) \cup (F \cap S_4) \rightarrow$

$P(F) = P(F/S_1).P(S_1) + P(F/S_2).P(S_2) + P(F/S_3).P(S_3)$

$+P(F/S_4).P(S_4) =$

$0{,}25.0{,}5 + 0{,}35.0{,}4 + 0{,}3.0{,}6 + 0{,}1.0{,}3 = 0{,}475$

On demande de calculer :

1°) $P(S_1/F) = \dfrac{P(F/S_1).P(S_1)}{P(F)} = \dfrac{0.125}{0.475} = 0.263$

2°) $P(S_4/G) = \dfrac{P(G/S_4).P(S_4)}{P(G)} = \dfrac{0.1.0.7}{0.525} = 0.133$

III.9 :

Soient les événements :

U_1 = « On joue avec l'urne U_1 »

U_2 = « On joue avec l'urne U_2 »

R = « Obtenir une boule rouge »
B = « Obtenir une boule blanche »

1°) On cherche P(R)
On a :

$$P(R) = P(R/U_1).P(U_1) + P(R/U_2).P(U_2)$$

$$= \frac{4}{6}.\frac{1}{2} + \frac{2}{6}.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{P(R) = \frac{1}{2}.}$$

2°)

$$P(B) = P(B/U_1).P(U_1) + P(R/U_2).P(U_2) = \frac{1}{2} = 1 - P(R)$$

$$\boxed{P(B) = \frac{1}{2}}$$

3°) Désignons par R_i = l'événement obtenir une boule rouge au ième tirage.
on cherche $P(R_3 / R_1 \cap R_2)$
On a :

$$P(R_3 / R_1 \cap R_2) = \frac{P(R_1 \cap R_2 \cap R_3)}{P(R_1 \cap R_2)}$$

$$P(R_1 \cap R_2) = P\left[(R_1 \cap R_2) \cap (U_1 \cup R_1) \cap (R_2 \cap U_2)\right]$$

$$= P(R_1 \cap R_2 / U_1).P(U_1) + P(R_1 \cap R_2 / U_2).P(U_2)$$

$$P(R_1 \cap R_2 / U_1) = \frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$P(R_1 \cap R_2 / U_2) = \frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

$$P(R_1 \cap R_2) = \frac{4}{9}.\frac{1}{2} + \frac{1}{9}.\frac{1}{2} = \frac{5}{18}.$$

On aura également :

$$P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 / U_1).P(U_1) +$$

$$P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 / U_2).P(U_2) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 . \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^3 . \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \rightarrow$$

$$(R_3 / R_1 \cap R_2) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{18}} = \frac{3}{5}$$

$$\boxed{P(R_3 / R_1 \cap R_2) = \frac{3}{5}}$$

III . 10 :

Soient :

F = L'événement « avoir Face ».

FF = L'événement « avoir deux fois Face ».

P = L'événement « avoir Pile ».

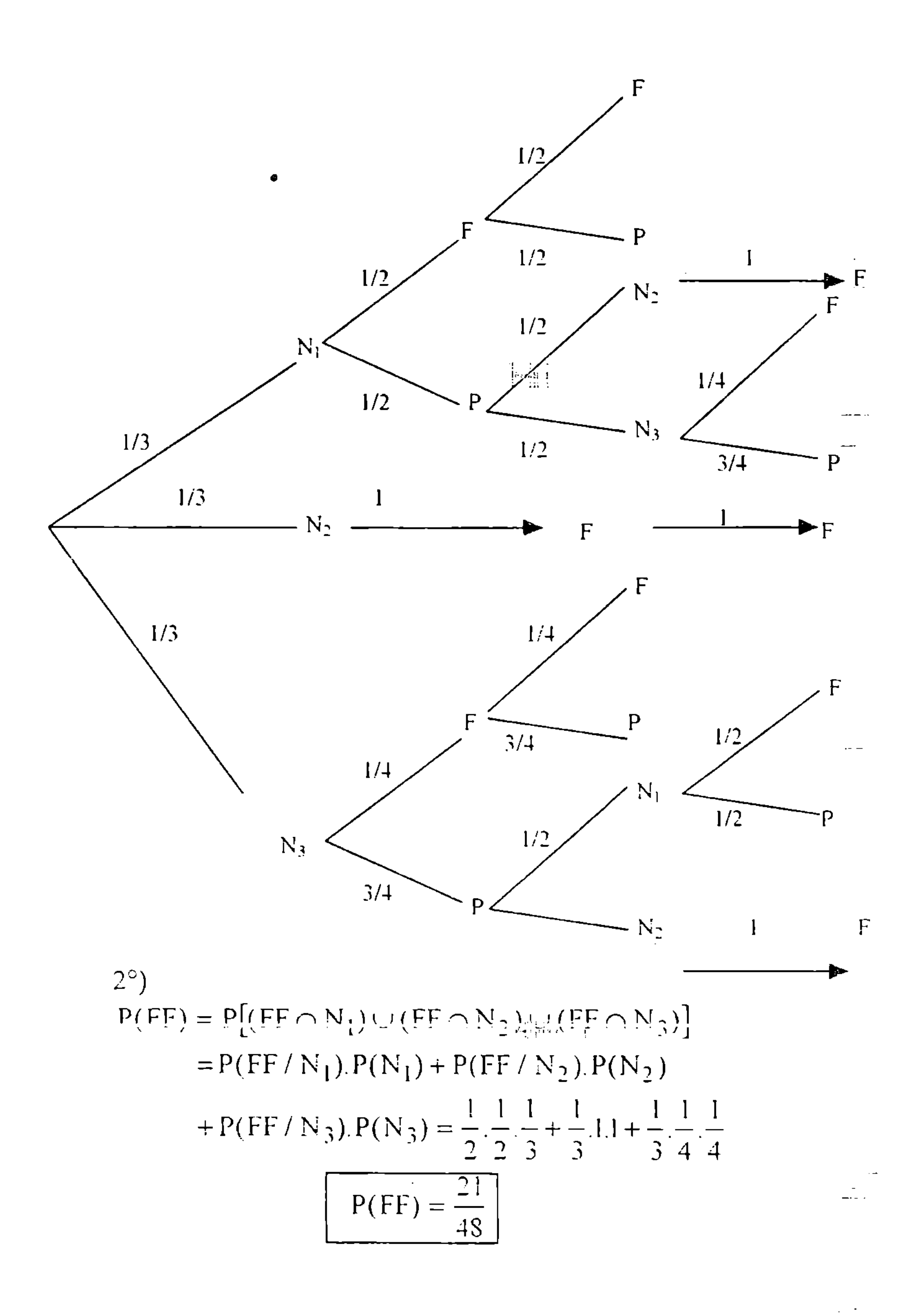
N_1 = La boule tirée est normale.

N_2 = La boule tirée comporte deux faces.

N_3 = La boule tirée est truquée.

1°)

Nous pouvons schématiser les différents résultats sur un diagramme en arbre :



2°)

$$P(FF) = P\left[(FF \cap N_1) \cup (FF \cap N_2) \cup (FF \cap N_3)\right]$$

$$= P(FF / N_1).P(N_1) + P(FF / N_2).P(N_2)$$

$$+ P(FF / N_3).P(N_3) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{3} + \frac{1}{3}.1.1 + \frac{1}{3}.\frac{1}{4}.\frac{1}{4}$$

$$\boxed{P(FF) = \frac{21}{48}}$$

3°)

$$P(pp) = P\left[(pp \cap N_1) \cup (pp \cap N_3)\right]$$

$$= P(pp / N_1).P(N_1) + P(pp / N_3).P(N_3)$$

$$\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{4} + \frac{1}{3}.\frac{3}{4}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{6}{48}.$$

N.B :

$$P(Fp) = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{3}.\frac{1}{4}.\frac{3}{4} = \frac{7}{48}.$$

$$P(pF) = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.1 + \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{4} + \frac{1}{3}.\frac{3}{4}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{3}.\frac{3}{4}.\frac{1}{2}$$

$$= \frac{14}{48}.$$

4°)

$$p(N_2 / F) = \frac{P(N_2 \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F / N_2).P(N_2)}{P(F)}.$$

$$P(F) = P(F \cap N_1) + P(F \cap N_2) + P(F \cap N_3)$$

$$= P(F / N_1).P(N_1) + P(F / N_2).P(N_2)$$

$$+ P(F / N_3).P(N_3) = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} + 1.\frac{1}{3} + \frac{1}{4}.\frac{1}{3} = \frac{7}{12} \rightarrow$$

$$\boxed{P(N_2 / F) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{12}} = \frac{4}{7}}$$

N . B :

Nous pouvons vérifier que :

$P(N_1 / F) = \frac{2}{7}$ et $P(N_3 / F) = \frac{1}{7}$

CHAPITRE IV :

LES VARIABLES DISCRETES A UNE DIMENSION

SECTION I : NOTION DE VARIABLES ALEATOIRES

Soient :

E : un ensemble fondamental ou ensemble de résultats possibles d'une certaine experience.

A_i Les événements de E.

P : Une application qui associe à chaque élement de E sa probabilité:

$$\forall A_i \subset E \xrightarrow{P} Pr(A_i) \in [0,1].$$

X : Une application qui associe à chaque élement de E un nombre réel noté X(E).

On dit dans ce cas , que l'application X est une variable aleatoire.

Ainsi, une variable aléatoire X consiste à associer un nombre à chaque événement.

Définition :

Une variable aléatoire est dite discrète si ses différentes valeurs possibles sont en nombre ***fini*** ou en ***infinité dénombrable*** c'est-à-dire :

$$X = (x_1, x_2, \ldots).$$

SECTION II : LOI DE PROBABILITE

II.1 - Définition :

Une loi de probabilité est une fonction qui fait correspondre à chaque valeur de la variable aléatoire X sa probabilité : c'est-a-dire

$\forall x_i \in X \rightarrow p_i = P(X = x_i)$; ce qui se lit « probabilité que la variable aléatoire X prenne la valeur particulière x_i » ; et telle que :

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1.$$

Remarque : On parle indifférement de densité de probabilité (d.d.p.) de la variable aléatoire (v.a) X ou de la loi de probabilité de la v.a X.

II.2 : - PRESENTATION DES RESULTATS ET REPRESENTATION GRAPHIQUE

La d.d.p est donnée généralement sous forme de tableau : sur la première ligne on écrit les différentes valeurs de la v.a X et sur la deuxième ligne on écrit les probabilités correspondantes.

La représentation graphique de la d.d.p d'une v.a discrète est **un diagramme en bâton.**

SECTION III : FONCTION DE REPARTITION

III.1: Définition :

On appelle fonction de répartition d'une v.a discrète X ; la fonction F définie par :

$$\forall x \in X; \quad F(x) = P(X < x).$$

Propriétés :

1°) F(x) est définie pour tout x réel.

2°) $0 \leq F(x) \leq 1$; pour tout x réel.

3°)

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

$$F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

4°) F(x) est non décroissante :

$\forall x_1 < x_2$; alors $F(x_1) \leq F(x_2)$.

III.2 : REMARQUE :

Nous allons adopter la définition précédente de la fonction de répartition dans cet ouvrage ; mais il est à signaler que quelques auteurs définissent la fonction de répartition comme suit :

$\forall x \in X : F(x) = P(X \leq x)$

III.3: PRESENTATION ET REPRESENTATION GRAPHIQUE :

La fonction de répartition est donnée généralement sous forme de tableau.

La représentation graphique de la fonction de répartition d'une variable discrète est **une courbe en escalier** appélée aussi **courbe cumulative**.

Conformément à la définition de la fonction de répartition l'extrémité droite de chaque « marche » appartient à la fonction mais pas l'extrémité gauche.

III.4 : CALCUL DES PROBABILITES A L'AIDE DE LA FONCTION DE REPARTITION

1°) $P(x \leq X \leq y) = F(y+1) - F(x)$

2°) $P(x \leq X < y) = F(y) - F(x)$

3°) $P(x < X < y) = F(y) - F(x+1)$

4°) $P(x < X \leq y) = F(y+1) - F(x+1)$

5°) $P(X \geq x) = 1 - F(x)$

6°) $P(X \leq x) = F(x+1)$

7°) $P(X = x) = F(x+1) - F(x)$.

SECTION IV : CARACTERISTIQUES D'UNE VARIABLE DISCRETE

V.1 - ESPERANCE MATHEMATIQUE

a) Définition :

L'espérance mathématique d'une v.a discrète X est la moyenne arithmétique des valeurs possibles pondérées par les probabilités correspondantes.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Remarques :

* Lorsque la V.A X est discrète mais possède une infinité dénombrable des valeurs possibles x, l'espérance mathématique est :

$$E(X) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

* L'espérance mathématique n'existe dans ce cas que si cette limite est finie. Dans le cas contraire ; on dit que l'espérance n'existe pas.

* L'éspérence mathématique peut prendre une valeur reelle finie quelconque : positive ; négative : entière : non entière etc...

b) Propriétés :

1°) $E(aX + b) = aE(X) + b \quad \forall \quad a \text{ et } b \in \mathbb{R}$

2°) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

$\forall$ X et Y deux v.a discrètes

et d'une façon générale .

$$E(X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$E(a_1 X_1 + a_2 X_2 \ldots\ldots + a_n X_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$$

3°) $E(X.Y) = E(X) . E(Y)$ si et seulement si les variables X et Y sont independantes.

4°) Soit $Y = X - E(X)$, alors $E(Y) = E(X - E(X)) = 0$

L'éspérance mathématique d'une variable centrée est nulle.

IV.2 : VARIANCE :

a) Définition :

La variance de la v.a X ; notée V(X) ; est l'espérance mathématique des carrés des écarts à l'espérance mathématique.

$$V(X) = E\left\{(X - E(X))^2\right\} = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)^2$$

L'écart type noté σ_X est la racine carrée positive de la variance

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

Remarques :

- $V(X) \geq 0 \rightarrow E(X^2) \geq (E(X))^2$
- V (X) est une mesure d'incertitude ou dispersion.
- Relations entre V(X) et σ_X

$\sigma_X < V(X)$ ssi $V(X) > 1$

$\sigma_X > V(X)$ ssi $V(X) < 1$

$\sigma_X = V(X)$ ssi $V(X) = 1$

b) Propriétés de la variance :

1°) $V(aX + b) = a^2 V(X)$ La variance d'une constante est nulle.

2°) $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ ssi X et Y sont deux v.a indépendantes.

et plus généralement :

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$ si les X_i sont des v.a indépendantes.

Remarques :

* $V(X-Y) = V(X+Y) = V(X)+V(Y)$ si X et Y sont indépendantes

* $V(aX) = V(-aX) = a^2 V(X) \quad \forall a \in R.$

* $V(aX+bY) = a^2 V(X) + b^2 V(Y)$ *si X et Y sont indépendantes*

IV.3 : LES MOMENTS DES DIFFERENTS ORDRES :

On appelle moment d'ordre K de la v.a X ; l'espérance mathématique de X^k. On note

$$m_k = E(X^k)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{On a: Moment d'ordre } 1 &= m_1 = E(X) \\ \text{Moment d'ordre } 2 &= m_2 = E(X^2) \end{aligned}\right\} \rightarrow V(X) = m_2 - m_1^2$$

Cette notion peut être étendue à un couple de v.a (X, Y).

On appelle moment d'ordre (r, s) l'éspérence mathémathique de ($X^r . Y^s$) et on note :

$$m_{rs} = E(X^r Y^s)$$

$m_{10} = E(X)$ $\quad$ $m_{01} = E(Y)$

$m_{20} = E(X^2)$ $\quad$ $m_{02} = E(Y^2)$

$m_{11} = E(XY).$

$V(X) = m_{20} - m_{10}^2$; $\quad V(Y) = m_{02} - m_{01}^2$

IV.4 : MEDIANE :

La médiane est définie comme la valeur milieu de l'ensemble des valeurs de la variable aléatoire. Sa position est telle qu'elle divise la distribution en deux parties égales.

Si x est la valeur médiane de la v. a. X ; nous avons :

$$\begin{cases} P(X < x) = F(x) \geq 0{,}5 \\ P(X < x - 1) = F(x - 1) < 0{,}5 \end{cases}$$

IV. 5 : LE MODE :

Le mode est la valeur de la v. a X. à laquelle correspond le maximum de d.d.p.

Certaines distributions n'ont aucun mode ; d'autres en ont plusieurs.

IV. 6 : INEGALITE DE BIENAYME-TCHEBYCHEFF :

Soit une v.a X. Nous avons les inégalités suivantes :

$$P\left[\left|X - E(X)\right| > a\right] < \frac{\sigma_X^2}{a^2} \rightarrow$$

$$P\left[\left|X - E(X)\right| \leq a\right] \geq 1 - \frac{\sigma_X^2}{a^2} \qquad \text{où} \sigma_X^2 = V(X). \geq 1 - \frac{\sigma_X^2}{a^2}$$

où $\sigma_X^2 = V(X)$.

Pour $a = t\sigma$; ces inégalités s'écrivent :

$$P\left[\left|X - E(X)\right| > t\sigma\right] < \frac{1}{t^2} \rightarrow$$

$$P\left[\left|X - E(X)\right| \leq t\sigma\right] \geq 1 - \frac{1}{t^2}$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff permet de connaitre la probabilité pour une variable aléatoire de prendre ses valeurs à

l'extérieur où à l'intérieur d'un certain intervalle centré sur l'espérance mathématique sans connaitre la loi de cette v.a.

Les résultats obtenus avec cette inégalité sont toujours moins precis que ceux acquis grâce à la connaissance de la loi exacte de la v.a considérée.

SECTION V : FONCTION GENERATRICE DES MOMENTS ET FONCTION GENERATRICE DES PROBABILITES :

V.1 - FONCTION GENERATRICE DES MOMENTS :

Supposons qu'il existe un nombre positif h / ∀t et $-h \leq t \leq h$ l'espérance mathématique $E(e^{tx})$ existe.

On appelle fonction génératrice des moments de la v.a X ; la fonction défini par :

$$\mu_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_i e^{tx_i} p_i \text{ avec } p_i = P(X = x_i)$$

Cette fonction nous permet d'avoir les moments des différents ordre. En effet, nous avons

$$\left.\begin{array}{l} \mu'_X(0) = E(X) \\ \mu''_X(0) = E(X^2) \end{array}\right\} \rightarrow V(X) = \mu''_X(0) - (\mu'_X(0))^2$$

et d'une façon générale $\mu^r_X(0) = E(X^r)$

où $\mu^r_X(0)$ est la dérivée d'ordre r de $\mu_X(t)$ au point $t = 0$

V.2 FONCTION GENERATRICE DES PROBABILITES:

Cette fonction n'est définie que si les valeurs particulières x d'une v.a sont des nombres entiers ≥ 0.

a) Définition :

Etant donnée une variable aléatoire X telle que les xi sont des entiers ≥ 0 la fonction génératrice des probabilités est l'espérance

mathématique de la variable t^X où t désigne un nombre réel quelconque. On note cette fonction G(t).

Nous avons :

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{i=1}^{n} p_{xi} t^{xi} = p_0 t^0 + p_1 t^1 \ldots\ldots + p_n t^n$$

b) Propriétés :

P_1 : La fonction génératrice des moments de la somme de deux variables aléatoires **indépendantes** est égale au produit de leurs fonctions génératrices.

En effet :

$$\mu_{X+Y}(t) = E\left[e^{t(X+Y)}\right] = E\left[e^{tX} . e^{tY}\right] =$$

$$E(e^{tX}).E(e^{tY}) = \mu_X(t).\mu_Y(t)$$

P_2 La fonction génératrice des probabilités de la somme de deux variables aleatoires **indépendantes** est égale au produit de leurs fonctions generatrices.

En effet :

$$G_{X+Y}(t) = E\left[t^{X+Y}\right] = E(t^X).E(t^Y) = G_X(t).G_Y(t).$$

EXERCICES

IV.1 :

On lance simultanément deux dés bien équilibrés. Soit X la variable aléatoire qui fait correspondre la partie entière des points marqués par le premier dé divisé par les points marqués par le second dé.

1°) Calculer la distribution de X et la représenter graphiquement.

2°) Déterminer la fonction de répartition de X.

3°) Calculer l'espéance; la variance; la valeur modale et la valeur médiane de X.

4°) Déterminer x_0 et x_1 tel que :

$$P(X < x_0) = \frac{1}{18} \text{ et } P(X \geq x_1) = \frac{7}{18}$$

5°) Déterminer a pour que :

V (a X +b) = 14

6°) Déterminer ε pour que $P(|X - E(X)| > \varepsilon) < 0{,}56$.

IV. 2 :

On lance une pièce de monnaie bien équilibrée jusqu'a ce que l'on obtienne pile pour la première fois.

Soit X = la variable aléatoire définie par : « nombre de jets nécessaires pour voir le jeu se terminer ».

1°) Calculer la distribution de probabilité de X.

2°) Vérifier que la somme des probabilités correspondantes est égale à 1.

3°) Représenter graphiquement la densité de probabilité; en déduire la valeur modale.

4°) Déterminer l'éspérance E(X)

5°) Déterminer la fonction de répartition; en déduire la valeur médiane.

IV. 3 :

Soit une variable aléatoire discréte X dont la densité de probabilité est :

x	0	1	2	3	4	5	6
P (X= x)	0,3	0,2	0,15,	x_1	x_2	x_3	x_4

1°) Déterminer x_1 x_2 x_3 et x_4 sachant :

$x_3 = x_4$

$x_3 + x_4 = x_2$

$3x_3 = x_1$

2°) Calculer l'éspérance; la variance; la valeur modale et la valeur médiane de la variable X.

3°) Déterminer x_0 et x_1 tel que :

$P(X > x_0) = 0,5$ $P(x \leq x_1) = 0,7$.

4°) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-tchebycheff ; determiner:

$P(|X - E(X)| \leq 4\sigma)$

et $P(|X - E(X)| > 3\sigma)$

5°) Détrminer la fonction de répartition correspondante.

6°) Calculer ; en utilisant la fonction de repartition ;

a) $p(3 < x < 6)$; d) $P(2 \leq x < 5)$

b) $P(3 \leq x \leq 6)$; e) $P(2 < x \leq 5)$.

c) $P(x \leq 4)$; f) $P(x \geq 3)$.

IV. 4 :

Soit la fonction F définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{3} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{2}{3} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{K}{5} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

1°) Déterminer la constante K pour que F (x) soit la fonction de répartition d'une variable aléatoire X.

2°) Rprésenter graphiquement F (x)

3°) Calculer $P(1 \leq X \leq 3)$.

4°) Calculer l'épérance et la variance de X.

5°) Déterminer la fonction génératrice des moments de X. En déduire $E(X^3)$

6)Calculer $P\left(\left|\frac{X - E(X)}{\sigma_X}\right| \geq 1\right)$ où σ_X = écart type de X

IV. 5 :

Soit $E = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ l'ensemble des resultats d'une expérience aléatoire.

Soit $A = \{w_1, w_3\}$ un sous ensemble de E et

$\mathcal{A} = \{A, \bar{A}, \emptyset, E\}$ un ensemble de parties de E

1°) Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu

2°) Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace probabilisable sur lequel est définit une application P de $(E, \mathcal{A})$ dans R telle que :

$$P(B) = \frac{\text{card } B}{\text{card } E} \quad \forall B \in \mathcal{A}.$$

Montrer que P est une mesure de probabilité.

3°) Soit (E, A, P) un éspace probabilisable et soit X une application de E dans R définie par :

$$X(w_i) = 1 \qquad \text{si } w_i \in A$$

$$X(w_i) = 0 \qquad \text{si } w_i \in \overline{A}$$

où i = 1,2,3,4.

_Montrer que X est une variable aléatoire discrète.

_Determiner l'ensemble de ses valeurs.

_4°) Déterminer la loi de probablité de la v.a.X.

5°) Calculer l'ésperance et la variance de X.

6°) Soit une variable aléatoire $Y = aX + b$ où $a > 0$ et $b \in R$ sont 2 constantes. Déterminer a et b pour que Y soit une variable aléatoire centrée (c'est à dire d'espérance nulle et de variance égale à 1).

IV. 6 :

On jette n fois une pièce de monnaie truquée. La probablilité d'avoir pile est égale à $\frac{1}{4}$

Soit F_n la fréquence du nombre de pile

1°) Calculer $E(F_n)$ et $V(F_n)$

2°) Chercher a tel que

$$P\left\{\left|F_n - E(F_n)\right| \geq a\right\} \leq 0,1$$

3°) Chercher b tel que :

$$P\left\{\left|F_n - E(F_n)\right| \geq \frac{1}{100}\right\} \leq b$$

4°) Chercher n tel que :

$$P\left\{\left|F_n - E(F_n)\right| \leq \frac{1}{100}\right\} \geq 0,99$$

IV. 7 :

On lance un dé comprenant 4 faces rouges et 2 faces vertes jusqu'à ce que l'on obtienne soit verte soit 10 fois rouges

Soit X = la variable aléatoire définie par nombre de lancers nécessaires pour voir le jeu se terminer.

1°) Calculer la distribution de probabilité de X.

2°) Calculer la valeur modale.

3°) Calculer la moyenne et la variance de X.

IV . 8 :

On lance un dé comprenant 4 faces rouges et 2 faces vertes quatre fois.

I) Soit X_1 la variable aléatoire représentant le nombre de faces rouges obtenues.

Calculer la distribution de probabilité ; la moyenne et la variance de X_1.

II) Soit X_2 la variable représentant la plus grande succession de faces rouges que l'on obtient en 4 lancers.

Calculer la distribution de probabilté ; la moyenne et la variance de X_2.

IV) 9 :

Un joueur lance deux dès bien équilibrés; Il gagne 5 dinars si la somme des points obtenus est un multiple de 3; 8^{D} si cette somme est un multiple de 5 ; Par contre; il perd 15^{D} si la somme est égale à 8 et 3^{D} dans les autres cas.

Ce jeu est il favorable au joueur? pourquoi?

IV. 10 :

Un tenancier présente le jeu suivant :

Tout joueur effectue une mise égale à 60^{D}.

Il jette deux dés bien équilibrés. Soit X le nombre lu sur le premier dé et Y le nombre lu sur le deuxième dé.

- Si la somme des nombres obtenus est un multiple de 4 (exepté 12) le joueur reçoit 40 dinars.
- Si la somme des nombres obtenus est un multiple de 5 ; le joueur reçoit 50 dinars.
- Si cette somme est le 6; le joueur reçoit 120 dinars.
- Si cette somme est le 11; le joueur reçoit 150 dinars.
- Si cette somme est le 12; le joueur reçoit 200 dinars.

Le joueur est perdant dans toutes les autres éventualités et dans ce cas il ne reçoit rien.

Soit X la variable aléatoire « Somme reçu par le joueur ».

1°) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoireX.

2°) Calculer l'espérance mathémathique de cette variable aléatoire.

3°) Calculer sa varaince.

4°) Ce jeu est-il favorable au tenancier?

IV. 11 :

On lance deux dès bien équilibrés soit X= le nombre lu sur le premier dé et Y le nombre lu sur le second dé.

1°) Calculer la distribution de probabilité de la variable Z= X + Y.

2°) Déterminer la fonction génératrice des probabiltés de Z.

3°) Calculer l'epérance et la variance de Z.

a) Directement,

b) En utilisant les fonctions génératrices des moments.

IV. 12 :

On tire une carte au hasard d'une boite contenant 5 cartes numérotées 1,2,3,4,5.

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre obtenu et Y la variable aléatoire prenant les valeurs (1 ou 4) suivant que l'on obtient soit un nombre impair; soit un nombre pair.

1°) Calculer la distribution ; l'éspérance; la variance de :

a) X ; b) Y ; c) X + Y ; d) X - Y e) X. Y.

IV. 13 :

Soit une variable aléatoire discrète X dont la densité de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
P(X=x)	0,05	a	0,1	b	0,1	c	0,05

Déterminer a, b et c sachant que la distribution est symétrique et que la variance est égale à 2,7.

IV 14 :

On considère l'application f : IN * → IR définie par :

$$f(n)=\frac{4}{n(n+1)(n+2)}$$

1°) Montrer que f peut s'écrire sous la forme :

$$f(n)=\frac{A}{n}+\frac{B}{(n+1)}+\frac{C}{(n+2)}$$

En déduire les valeurs de A, B et C.

2°) Montrer que f peut être considérée comme la densité de probabilité d'une variable discrète X définie sur N*

IV. 15 :

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes :

I) Supposons que les moments d'ordre 1 et 2 de X et Y sont connus. On définit les deux variables aléatoires :

A = 2 X + 3Y

B = 4 X - 5Y

Calculer :

1°) $E(A);E(B);E(A+B);E(A-B)$ et $E(A.B)$.

2°) $V(A);V(B);V(A+B)$ et $V(A-B)$

3°) $Cov(A.B)=E(A.B)-E(A).E(B)$.

II) Soient F (x) et G (y) les fonctions de répartition de X et Y respectivement

1°) Déterminer la fonction de répartition de Z = Max (X,Y)

2°) Déterminer la fonction de répartition de T= min (X,Y)

IV : 16

Répondre par vrai au faux *(Justifier votre réponse)*

a) Si une variable aléatoire X prend des valeurs quelconques (positives ou négatives) son espérance mathémathique peut être négative.

b) La même variable peut avoir un écart type négatif.

c) Si on retranche une quantité positive h de toutes les valeurs d'une variable aléatoire X ; son espérence mathématique est diminuée de la même quantité h .

d) Dans la même hypothèse ; l'écart type de cette variable aléatoire X ; est également diminuée de la même quantité h.

e) Les valeurs d'une variable aléatoire sont multipliées par un nombre k. En conséquence son éspérance mathémathique est multipliée par le même ordre k.

f) Dans la même hypothèse la variance de cette variable est multipliée par k.

g) Dans la même hypothèse son écart type est multipliée par $\sqrt{k}$

h) L'espérance mathématique d'une variable X est aussi la valeur la plus probable de cette variable.

i) La valeur médiane M d'une variable X est telle que 2.F(M) = F(b) où b étant la valeur la plus élevée que peut prendre la variable X et F (x) étant la fonction de répartition de cette variable.

j) Cette valeur médiane M est telle que F (M) = 1-F (M)

k) La fonction de répartition peut prendre des valeurs supérieures à 1.

l) La fonction de répartition peut prendre des valeurs négatives

m) La d. d. p peut être supérieure à 1.

SOLUTIONS PROPOSEES

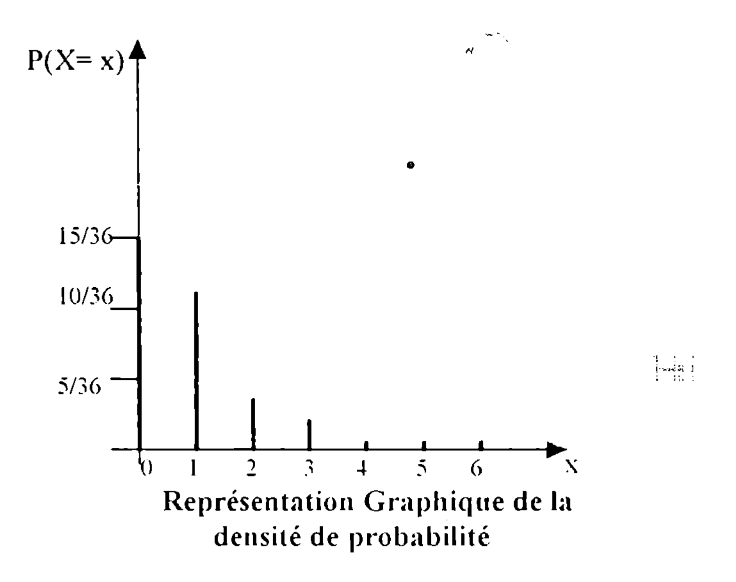
IV .1 :

Nous pouvons résumer l'ensemble des résultats possibles dans le tableau suivant :

1 de 2 de	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	0	1	1	2	2	3
3	0	0	1	1	1	2
4	0	0	0	1	1	1
5	0	0	0	0	1	1
6	0	0	0	0	0	1

1°) X= (0,1,2,3,4,5,6). Avec :

x	0	1	2	3	4	5	6
P (X=x)	15/36	12/36	4/36	2/36	1/36	1/36	1/36



Représentation Graphique de la densité de probabilité

2°) Fonction de Répartition

x	0	1	2	3	4	5	6	7 et +
F (x) = P(X<x)	0	15/36	27/36	31/36	33/36	34/36	35/36	1

La représentation graphique de cette fonction est une courbe en escalier.

3°)

$$E(X) = \sum_{i=0}^{6} p_i x_i = \frac{41}{36} = 1,14$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_i p_i x_i^2 - (\sum_i p_i x_i)^2 = 2,12$$

Valeur modale = 0; Valeur médiane 2.

En effet ; $F(2) = \frac{27}{36} \geq 0,5$; $F(1) = \frac{15}{36} < 0,5$

4°) x_0 n'existe pas et x_1 n'existe pas.

$5°)V(aX+5) = 14 \rightarrow a^2 V(X) = 14$

$\rightarrow a^2 .2.12 = 14 \rightarrow a = \pm 2{,}57.$

$6°)P(|X - E(X)| > \varepsilon) < 0{,}56 \rightarrow$

$$P((|X - E(X)| > \varepsilon) < \frac{V(X)}{\varepsilon^2} = \frac{2{,}12}{\varepsilon^2} = 0{,}56 \rightarrow$$

$$\varepsilon^2 = \frac{2{,}12}{0{,}56} = 3{,}78 \rightarrow \varepsilon = 1{,}95$$

IV. 2 :

Soient les événements :

p : « avoir pile »

F : « avoir face »

1°) X = (1,2,3,............).

X est une variable aléatoire discrète infinie (dénombrable).

$P(X=1) = P\ (X=p) = \frac{1}{2}$

$$P(X = 2) = P(X = Fp) = P(X = F).P(X = p) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{2^2}$$

$$P(X = n) = P(X = \underbrace{FF.......F}_{n-1}p) = \frac{1}{2^n}$$

$$2°)\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ...\frac{1}{2^n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}.\frac{1-(1/2)^n}{1-(1/2)} = 1$$

3°) La représentation graphique de la densité de probablité est un diagramme en bâton.

La valeur modale est x = 1 ; puisque $P(X=1) = \frac{1}{2}$ et

$\forall x \in X$ et $x \neq 1; P(X = x) = \frac{1}{2^x} < \frac{1}{2}$.

$4°) E(X) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \frac{1}{2} + 2.\frac{1}{2^2} + 3.\frac{1}{2^3} + \ldots + n.\frac{1}{2^n}$

$$= \frac{1}{2}$$
$$+ \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$
$$+ \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$
$$+ \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$$

$$+ \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \ldots \frac{1}{2^n}$$

$$E(X) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots \frac{1}{2^n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} 1 \frac{1 - (1/2)n}{1 - (1/2} = 2$$

$$E(X) = 2$$

5°) Fonction de répartition :

x	1	2	3	4	....	n
F (x) = P (X < x)	0	1/2	$1/2 + 1/2^2$	$1/2 + 1/2^2 + 1/2^3$		$\frac{1}{2} \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} \to$

La représentation graphique est une courbe en escalier.
La valeur médiane est x=2.

IV. 3 :

1°) Condition nécessaire

$$\sum_{i=1}^{6} P(X = x_i) = 1$$

Nous avons;

$$x_1 + x_2 + \underbrace{x_3 + x_4}_{x_2} = 0,35 \rightarrow$$

$$\boxed{x_1 + 2x_2 = 0,35}$$

D'autre part: $x_1 = 3x_3$ et $x_3 = x_4 \rightarrow$

$$x_3 + x_4 = 2x_3 = x_2 \rightarrow$$

$$3x_3 + 2x_3 + x_3 + x_3 = 0,35 \rightarrow x_3 = 0,05$$

$$x_1 = 0,15 \text{ et } x_2 = 0,10$$

Le tableau de densité de probabilité devient :

x	0	1	2	3	4	5	6
P (x=i)	0.3	0.2	0.15	0.15	0.1	0.05	0.05

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} p_i x_i = 1,9.$$

2°) $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{i=1}^{6} p_i x_i^2 - (\sum_{i=1}^{6} p_i x_i)^2$

$$= 6,8 - (1,9)^2 = 3,19$$

Valeur modale = 0

$3°) P(X > x_0) = P(X \le x_0) = P(< x_0 + 1) = 0{,}5$

$\rightarrow x_0 + 1 = 2 \rightarrow x_0 = 1.$

$P(X \le x_1) = 0.7 \rightarrow P(X < x_1 + 1) = 0.7 \rightarrow x_1$ n'existe pas

4°) Application de l'inégalité de Tchybecheff.

$$P(|X - E(X)| \le 4\sigma) = P(|X - E(X)| \le 4.1{,}8) \ge 1 - \frac{1}{4^2}$$

$$P(|X - E(X)| \le 4.1{,}8) \ge \frac{15}{16}$$

$$P(|X - E(X)| > 3\sigma) \le \frac{1}{9}$$

Remarque : Il est facile de vérifier ces 2 valeurs.

$P(|X - E(X)| \le 4\sigma) = P(E(X) - 4\sigma \le X \le E(X) + 4\sigma) =$
$P(1.9 - 4.1.8 \le X \le 1.9 + 4.1.8) = P(-5.3 \le X \le 9.1)$
$= P(0 \le X \le 9) = 1$ et l'inégalité est verifiée.

De même :

$P(|X - E(X)| \le 3\sigma) = P(E(X) - 3\sigma \le X \le E(X) + 3\sigma))$
$= P(0 \le X \le 7 = 1$

$\rightarrow P(|X - E(X)| > 3\sigma) = 0$ et l'inégalité est vérifiée

5°) La fonction de répartition est définie par F (x) = P (x < x)

x	0	1	2	3	4	5	6	7 et
F (x) = P (X < x)	0	0.3	0.5	0.65	0.8	0.9	0.95	1

6°)

a) $P(3 < X < 6) = P(X < 6) - P(X < 4) = F(6) - F(4) = 0.15$

b) $P(3 \le X \le 6) = P(X < 7) - P(X < 3) = F(7) - F(3)$
$= 1 - 0.65 = 0.35$

c) $P(X \le 4) = P(X < 5) = F(5) = 0.9$

d) $P(2 \leq X < 5) = P(X < 5) - P(X < 2) = F(5) - F(2) = 0.4$

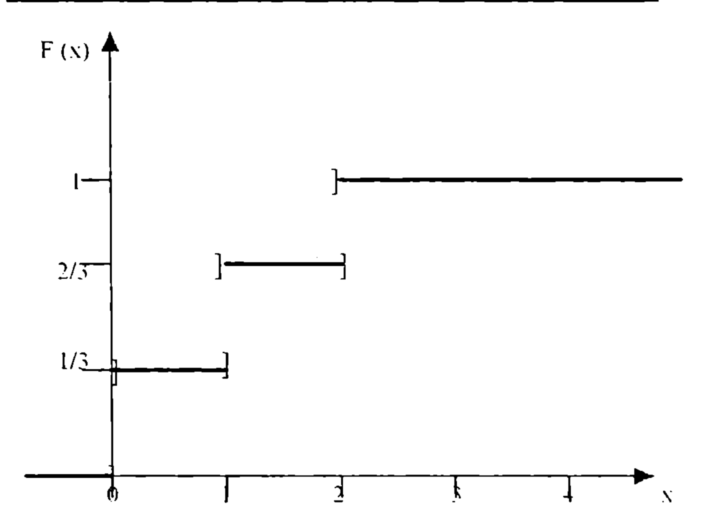
e) $P(2 < X \leq 5) = PX < 6) - P(X < 3) = 0.3$

f) $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - 0.65 = 0.35$

IV. 4 :

1°) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1 \rightarrow k = 5.$

x	0	1	2	3 et +
F(x) = P(x < x_1)	0	1/3	2/3	1



Représentation graphique de la fonction de répartition

3°) $P(1 \leq X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

$= P(X < 4) - P(X < 1) = F(4) - F(1) =$

$1 - 1/3 = 2/3$

4°) Nous pouvons déduire la densité de probabilité correspondante: et nous avons :

$$P(X=0)=P(X=1)=P(X=2)=\frac{1}{3}\rightarrow$$

$$E(X)=0.\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1.$$

$$E(X^2)=0.\frac{1}{3}+1.\frac{1}{3}+4.\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$$

$$V(X)=\frac{2}{3}$$

5°) Fonction génératrice de X .

$$\mu_X(t)=E(e^{tX})$$

$$E(e^{tX})=\frac{1}{3}e^{0.t}+\frac{1}{3}e^{t}+\frac{1}{3}e^{2t}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(e^{t}+e^{2t})$$

$$\boxed{\mu_X(t)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(e^{t}+e^{2t})}$$

$$E(X^3)=\mu_X^{(3)}(t)/_{t=0}$$

$$\mu_X^{(3)}(t)=\frac{1}{3}e^{t}+\frac{8}{3}e^{2t}\rightarrow$$

$$\boxed{\mu_X^{(3)}(0)=\frac{1}{3}+\frac{8}{3}=3}$$

$$6°)\,P\left(\left|\frac{X-E(X)}{\sigma_X}\right|\geq 1\right)=P\left(\left|\frac{X-1}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\right|\geq 1\right)$$

$$=1-P\left(\left|\frac{X-1}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\right|<1\right)=1-P\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}<X<1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$\boxed{P\left(\left|\frac{X-E(X)}{\sigma_X}\right|\geq 1\right)=1-P(X=1)=\frac{2}{3}}$$

IV. 5 :

$E = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$

$A = \{w_1, w_2\}$ un sous ensemle de E

$\mathcal{A} = \{A, \overline{A}, \phi, E\}$ un ensemble de parties de E.

1°) Pour que $\mathcal{A}$ soit une tribu, il faut qu'elle soit stable par complementation, par réunion finie ou infinie dénombrable et que $E \in \mathcal{A}$.

a) Stabilité par complémentation :

$\forall B \in \mathcal{A} \rightarrow \overline{B} \in \mathcal{A}$.

B peut être égale à ϕ ou A, $\overline{A}$ ou E (Nous pouvons vérifier la stabilité par complémentation).

b) Stabilité par réunion :

$\forall \{B_i\}_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{A} \rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{A}$.

Dans notre exemple :

$A \cup \overline{A} = E \in \mathcal{A}$.

$A \cup \overline{A} \cup \phi \cup E = E \in \mathcal{A}$.

$\overline{A} \cup \phi = \overline{A} \in \mathcal{A}$..............

c) $E \in \mathcal{A}$.

Donc $\mathcal{A}$ est une tribu.

2°) Pour que P soit une mesure de probabilité, il faut qu'elle vérifie les propriétés suivantes :

a) $\forall B \in \mathcal{A} \rightarrow P(B) \geq 0$

b) $\forall \{B_i\}$ une suite infinie d'événements de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)$

c) P (E) = 1.

Nous vérifions ces propriétés dans le cas de notre exemple :

$a) P(B) = \dfrac{\text{card}(B)}{\text{card } E} \qquad \forall B \in \mathcal{A}.$

Si $\quad B = A \rightarrow P(A) = \dfrac{\text{card } A}{\text{card } E} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} > 0.$

$B = \overline{A} \rightarrow P(\overline{A}) = \dfrac{\text{card } \overline{A}}{\text{card } E} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} > 0.$

$B = \phi \rightarrow P(\phi) = 0.$

$B = E \rightarrow P(E) = \dfrac{\text{card } E}{\text{card } E} = 1 > 0 \rightarrow P(B) \geq 0.$

$b) P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1.$

$c) P(E) = \dfrac{\text{card } E}{\text{card } E} = 1.$

3°) X est une variable aléatoire si X (I), où I est un intervalle de R ; appatient à la tribu $\mathcal{A}$.

Alors : $X^{-1}(I) = \phi$ si I ne contient ni 0 ni 1.

$X^{-1}(I) = A$ si I contient uniquement 1

$X^{-1}(I) = \overline{A}$ si I contient uniquement 0.

$X^{-1}(I) = E$ si I contient 0 et 1.

Dans notre exercice :

$X^{-1}(1) = \left(w_i, X(w_i) = 1 \right) = (w_1, w_3) = A \in \mathcal{A}.$

$X^{-1}(0) = \left(w_i, X(w_i) = 0 \right) = (w_2, w_4) = \overline{A} \in \mathcal{A}.$

$X(E) = \{0,1\}$ ensemble des valeurs de X.

4°) Loi de probabilité de X:

$P(X = 0) = P(w_i, X(w_i) = 0) = P(X^{-1}(0) \in \mathcal{A}) = P(\overline{A}) = \dfrac{1}{2}$

$P(X = 1) = P(w_i, X(w_i) = 1 = P(X^{-1}(1) \in \mathcal{A}) = P(A) = \dfrac{1}{2}$

Ainsi :

X(E)	0	1
P(X = x)	1/2	1/2

$E(X) = \frac{1}{2}$ et $V(X) = \frac{1}{4}$

5°) $Y = aX + b$ $a > 0$

Y est une variable aléatoire centrée réduite si :

$E(Y) = 0$ et $V(Y) = 1 \rightarrow$

$a\,E(X) + b = 0 \rightarrow \frac{a}{2} + b = 0.$

$a^2\,V(X) = 1 \rightarrow \frac{a^2}{4} = 1 \rightarrow a = 2$ et $b = -1.$

IV. 6 :

Soit p = l'événement « avoir pile » $P(p) = \frac{1}{4}$

F= l'événement « avoir face » $P(F) = \frac{3}{4}$

F_n la fréquence du nombre de pile = $\frac{X}{n} \rightarrow$

$E(F_n) = E(\frac{X}{n}) = \frac{1}{n}E(X) = \frac{np}{n} = p = \frac{1}{4}$

$V(F_n) = V(\frac{X}{n}) = \frac{1}{n^2}V(X) = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n} = \frac{3}{16.n}$

2°) Application de l'inégalité de Bienayme Tcheybicheff:

$P\left\{\left|F_n - E(F_n)\right| \leq t\sigma\right\} \geq 1 - \frac{1}{t^2}$

$P\left\{\left|F_n - E(F_n)\right| \geq t\sigma\right\} \leq \frac{1}{t^2} \rightarrow$

$P\left\{\left|F_n - p\right| \geq t\right\} \leq (\frac{\sigma}{t})^2 = \frac{\sigma^2}{t^2} \rightarrow$

$$P\{|F_n - p| \geq a\} \leq \frac{\sigma^2}{a^2} = \frac{3}{16na^2} = 0{,}1$$

$$\boxed{a = \sqrt{\frac{3}{1{,}6n}}}$$

3°)

$$P\left\{\left|F_n - E(F_n)\right| \geq \frac{1}{100}\right\} \leq b.$$

Nous avons :

$$P\{|F_n - E(F_n) \geq t|\} \leq \frac{\sigma^2}{t^2} \rightarrow$$

$$b = \frac{\sigma^2}{(1/100)^2} = \frac{\frac{3}{16n}}{\frac{1}{10.000}} = \frac{3.10000}{16n}$$

$$\boxed{b = \frac{3.10000}{16n} = \frac{1875}{n}}$$

4°)

$$P\left\{\left|F_n - E(F_n)\right| \leq \frac{1}{100}\right\} \geq 0{,}99.$$

$$P\left\{\left|F_n - E(F_n)\right| \leq \frac{1}{100}\right\} 1 - \frac{\frac{V(F_n)}{n}}{\frac{1}{10000}} = 1 - \frac{3.10000}{16n}$$

$$\rightarrow 1 - 3.\frac{10000}{16n} = 0{,}99 \rightarrow 0{,}01 = 3.\frac{10000}{16n}$$

$$\boxed{n = \frac{300.10000}{16} = 187500}$$

IV. 7 :

1°) X = (1,2,3,................,10)

$$P(X=1) = P(\text{Verte}) = P(V) = \frac{1}{3}$$

$$P(X=2) = P(\text{Rouge et Verte}) = P(RV) = \frac{2}{3}.\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

$$P(X=3) = P(RRV) = \frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2.\frac{1}{3}$$

$$P(X=9) = P(\underbrace{RR...R}_{8fois}V) = \left(\frac{2}{3}\right)^8.\frac{1}{3}$$

$$P(X=10) = P(\underbrace{RRR...R}_{10fois}) + P(\underbrace{RR......R}_{9fois}V)$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{10} + \left(\frac{2}{3}\right)^9.\frac{1}{3}$$

2°) La valeur modale est x = 1 puisque P(x=1) = 1/3 et

$\forall x \in X \text{ et } x \neq 1 \qquad P(X=x) < \frac{1}{3}$.

3°)

$$E(X) = 1.\frac{1}{3} + 2.\frac{2}{9} + 3.\frac{4}{27} + 4.\frac{2^3}{3^3}.\frac{1}{3} + 5.\frac{2^4}{3^4}.\frac{1}{3}$$

$$+6.\left(\frac{2}{3}\right)^5.\frac{1}{3} + 7\left(\frac{2}{3}\right)^6.\left(\frac{1}{3}\right) + 8\left(\frac{2}{3}\right)^7.\frac{1}{3} + 9\left(\frac{2}{3}\right)^8.\frac{1}{3}$$

$$+10\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{10} + \left(\frac{2}{3}\right)^9.\frac{1}{3}\right] = 2.94$$

$$E(X^2) = 1.\frac{1}{3} + 4.\frac{2}{9} + 9.\frac{4}{27} + 16.\left(\frac{2}{3}\right)^3.\frac{1}{3} + 25\left(\frac{2}{3}\right)^4.\frac{1}{3}$$

$$+36\left(\frac{2}{3}\right)^5\frac{1}{3} + 49\left(\frac{2}{3}\right)^6.\frac{1}{3} + 64\left(\frac{2}{3}\right)^7.\frac{1}{3} + 81\left(\frac{2}{3}\right)^8.\frac{1}{3}$$

$$+100\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{10} + \left(\frac{2}{3}\right)^9.\frac{1}{3}\right] \approx 13,70$$

$$\boxed{V(X) = 13,70 - (2,94)^2 = 5,06}$$

IV. 8 :

Soient:

R = L'événement « avoir rouge »→ $P(R) = \frac{2}{3}$

V = L'événement « avoir Verte »→ $P(V) = \frac{1}{3}$

Nous avons n = 4 lancers.

I) X_1 = nombre de faces rouges obtenues en n = 4 lancers →

$X_1 = (0,1,2,3,4)$

$P(X_1 = 0) = P(VVVV) = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

$P(X_1 = 1) = 4P(VVVR) = 4.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{2}{3} = \frac{8}{81}$

$P(X_1 = 2) = 6P(VVRR) = 6.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{24}{81}$

$P(X_1 = 3) = 4P(VRRR) = 4.\frac{1}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{32}{81}$

$P(X_1 = 4) = 4P(RRRR) = \frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{16}{81}$

On vérifie que :

$E(X) = 2,666$ $\quad E(X^2) = 8$ $\quad$ et $V(X) \approx 0,89$

X_2 = La plus grande succession de faces rouges obtenu.
$X_2 = (0,1,2,3,4)$

$$P(X_2 = 0) = P(VVVV) = \frac{1}{81}$$

$$P(X_2 = 1) = P(VVVR) + P(VRVV) + P(RVVV)$$
$$+P(VVRV) + P(VRVR) + P(RVRV)$$
$$+P(RVVR) = \frac{2}{81}.4 + \frac{4}{81}.3 = \frac{20}{81}$$

$$P(X_2 = 2) = P(VVRR) + P(VRRV) + P(RRVV)$$
$$+P(RVRR) + P(RRVR) = 3.\frac{4}{81} + 2.\frac{8}{81} = \frac{28}{81}$$

$$P(X_2 = 3) = P(VRRR) + P(RRRV) = 2.\frac{8}{81} = \frac{16}{81}$$

$$P(X_2 = 4) = P(RRRR) = \frac{16}{81}$$

On vérifie que

$E(X_2) = 2,32$ $E(X_2^2) = 6,57$ $V(X_2) = 1,19$

IV. 9 :

L'ensemble des résultats possibles peut être représenté dans le tableau suivant :

1 dé / 2 dé	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

P (gagner 5 ^{D}) = P (3,6,9,12) = 12/36

P (gagner 8 ^{D}) = P (5,10) = 7/36

P (perdre 15^D) = P(8) = 5/36

P (perdre 3^D) = P (reste) = 12/36

L'espérance mathémathique du gain est :

$$E = 5.\frac{12}{36} + 8.\frac{7}{36} - 15.\frac{5}{36} - 3.\frac{12}{36} = \frac{5}{36} = 0.138$$

L'éspérance mathémathique du gain est de plus 0,138D et par conséquent le jeu est favorable au joueur.

IV. 10 :

1°) X = (0; 40; 50; 120; 150; 200).

La densité de probablité est représentée dans le tableau suivant :

x	0	40	50	120	150	200
P (X=x)	13/36	8/36	7/36	5/36	2/36	1/36

2°) $E(X) = \sum_{i=1}^{6} p_i x_i = 49.16$

Le gain moyen du joueur est de 49,16 dinars.

3°) $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2786.07 \rightarrow \sigma_x = 52.78.$

4°) Ce jeu est favorable au tenancier puisque le montant de la mise est supérieur à l'éspérance mathémathique du gain du joueur.

IV. 11 :

Z = (2,3,4,5,........,12) Avec :

1°) La distribution de probabilité de Z est donnée par :

z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(Z=z)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

2°) La fonction génératrice des probabilités de Z est :

$$G_{X+Y}(t) = G_Z(t) = P_0 t^0 + P_1 t^1 + P_2 t^2 + \dots\dots + P_n t^n$$

$$= \frac{1}{36}t^2 + \frac{2}{36}t^3 + \frac{3t^4}{36} + \dots\dots + \frac{6}{36}t^7 + \frac{5}{36}t^8 + \dots\dots + \frac{1}{36}t^{12}$$

$$= \frac{1}{36}\left[t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6\right]^2$$

$$\boxed{G_Z(t) = \frac{1}{36}\left[t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6\right]^2}$$

3°) Cacul de l'espérance et de la variance

a) Directement

$$E(Z) = \sum_{i=2}^{12} p_i z_i = 2.\frac{1}{36} + 3.\frac{2}{36} + \dots\dots + 7.\frac{6}{36} + 8.\frac{5}{36} + 9.\frac{4}{36} + \dots + 12.\frac{1}{36}$$

$$\frac{252}{36} = 7$$

$$E(Z^2) = \sum_{i=2}^{12} p_i z_i^2 = \frac{329}{6} \approx 54.83$$

$$\rightarrow V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = \frac{35}{6}$$

b) Fonction génératrice des moments :

$$\mu_{X+Y}(t) = \mu_Z(t) = E\left[e^{tX}\right]$$

$$= \frac{1}{36}\left[e^t + e^{2t} + e^{3t} + e^{4t} + e^{5t} + e^{6t}\right]^2.$$

$$\boxed{\mu_Z(t) = \frac{1}{36}\left[e^t + e^{2t} + e^{3t} + e^{4t} + e^{5t} + e^{6t}\right]^2}$$

$$E(Z)=\mu'_Z(0)=\frac{2}{36}.6[1+2+3+4+5+6]=\frac{252}{36}=7.$$

$$E(Z^2)=\mu''_Z(0)=\frac{329}{6}\rightarrow V(Z)=\frac{35}{6}$$

IV. 12 :

a) X = La variable aléatoire représentant le nombre obtenu

X = (1,2,3,4,5). Avec :

$$P(X=1)=P(X=2)=P(X=3)=P(X=4)=P(X=5)=\frac{1}{5}$$

$$E(X)=\frac{1}{5}[1+2+3+4+5]=3$$

$$E(X^2)=\frac{1}{5}[1+4+9+16+25]=11$$

$$V(X)=11-9=2.$$

b) Y = (1,4)

$$P(Y=1)=P(X=1 \text{ ou } X=3 \quad \text{ou } X=5)=\frac{3}{5}$$

$$P(Y=4)=P(X=2 \text{ ou } X=4)=\frac{2}{5}$$

$$E(Y)=1.\frac{3}{5}+4.\frac{2}{5}=\frac{11}{5}=2,2.$$

$$E\left(Y^2\right)=1.\frac{3}{5}+16.\frac{2}{5}=7.$$

$$V(Y)=7-(2,2)^2=2,16$$

c)

cartes	1	2	3	4	5
X	1	2	3	4	5
Y	1	4	1	4	1
S= X+Y	2	6	4	8	6

S = X + Y = (2,4,6,8). Avec :

$P(S=2)=\frac{1}{5};\quad P(S=4)=\frac{1}{5};\quad P(S=6)=\frac{2}{5};\quad P(S=8)=\frac{1}{5}$

$E(S)=\frac{2+4+12+8}{5}=\frac{26}{5}=5.2=E(X)+E(Y)$

$E(S^2)=\frac{4+16+72+64}{5}=31.2 \rightarrow V(S)=4.16.$

$V(S)=V(X)+V(Y)$

d) En utilisant le tableau précédent ; nous avons :

$D = X\text{-}Y = (0;-2;2;0;4) \rightarrow$

Avec

$P(D=-2)=\frac{1}{5}; P(D=0)=\frac{2}{5}; P(D=2)=\frac{1}{5}$

$P(D=4)=\frac{1}{5}$

$E(D)=\frac{-2+2+4}{5}=0{,}8=E(X)-E(Y)$

$E(D^2)=\frac{4+4+16}{5}=4{,}8 \rightarrow V(D)=4{,}16=V(X)+V(Y)=V(S)$

e) En utilisant le tableau précédent ; nous avons

$Z = X \,.\, Y = (1,8,3,16,5)$

Avec :

$P(Z=1)=P(Z=3)=P(Z=5)=P(Z=8)=P(Z=16)=1/5$

$\rightarrow E(Z)=\frac{1+3+5+8+16}{5}=6{,}6=E(X).E(Y)$

$E(Z^2)=\frac{1+9+25+64+256}{5}=71$

$V(Z)=27{,}44$.

IV. 13 :

La distribution est symétrique

$E(X) = \rightarrow a = c$

$V(X)=2{,}7 \rightarrow E(X^2)=2{,}7 \rightarrow$

$4a+4c+8a=1{,}6 \rightarrow a=0{,}2=c$

$a + b + c = 0{,}7 \rightarrow b = 0{,}3$

Solution: $a = c = 0{,}2$ et $b = 0{,}3$

IV. 14 : •

1°) f admet 3 pôles simples 0 ; -1 et -2 ; donc :

$$f(n) = \frac{A}{n} + \frac{B}{(n+1)} + \frac{C}{(n+2)}$$

$$A = \lim_{n \to 0} nf(n) = \lim_{n \to 0} \frac{4}{(n+1)(n+2)} = 2$$

$$B = \lim_{n \to -1} (n+1)f(n) = \lim_{n \to -1} \frac{4}{n(n+2)} = -4$$

$$C = \lim_{n \to -2} (n+2)f(n) = \lim_{n \to -2} \frac{4}{n(n+1)} = 2.$$

$$f(n) = \frac{2}{n} - \frac{4}{(n+1)} + \frac{2}{(n+2)}$$

2°) f définie une densité de probabilité ; si elle vérifie les conditions suivantes :

* $f(n) \geq 0 \qquad \forall n \in X.$
* $\sum f(n_i) = 1$

La première condition est vérifiée.

Pour la deuxième condition; nous pouvons écrire $\sum f(n)$ sous la forme :

$$f(1) = 2 - \frac{4}{2} + \frac{2}{3}$$

$$f(2) = \frac{2}{2} - \frac{4}{3} + \frac{2}{4}$$

$$f(3) = \frac{2}{3} - \frac{4}{4} + \frac{2}{5}$$

$$f(4) = \frac{2}{4} - \frac{4}{5} + \frac{2}{6}$$

$$f(n-2) = \frac{2}{n-2} - \frac{4}{n-1} + \frac{2}{n}$$

$$f(n-1) = \frac{2}{n-1} - \frac{4}{n} + \frac{2}{n+1}$$

$$f(n) = \frac{2}{n} - \frac{4}{n+1} + \frac{2}{n+2}$$

$$\sum_{x_i = 1}^{n} f(x_i) = 1 - \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n+2} \rightarrow$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{x_i = 1}^{n} f(x_i) = 1.$$

Conclusion :

$f(n) = \frac{2}{n} - \frac{4}{(n+1)} + \frac{2}{(n+2)}$ définie bien une densité de probabilité.

IV. 15 :

X et Y sont indépendantes

I) $A = 2X + 3Y$; $B = 4X - 5Y$

1°) E (A) = 2 E(X) + 3E (Y)

E(B) = 4 E (X) - 5E(Y)

A+B= 6 X - 2Y → E (A + B) = 6 E (X) - 2 E (Y) = E (A) + E (B)

A-B = - 2 X + 8 Y → E (A- B) = - 2 E (X) + 8 E (Y)

= E (A) - E (B)

$A.B = 8X^2 + 2XY - 15Y^2 \Rightarrow E(A.B) = 8E(X^2)$
$+ 2E(XY) - 15E(Y^2) \neq E(A).E(B).$

Ainsi si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, deux combinaisons linéaires de ces 2 variables ne sont pas nécessairement indépendantes.

2°)

$$V(A) = V(2X+3Y) = 4V(X) + 9V(Y)$$
$$= 4\left[E(X^2) - (E(X))^2\right] + 9\left[E(Y^2) - (E(Y))^2\right]$$
$$= 4E(X^2) + 9E(Y^2) - 4(E(X))^2 - 9(E(Y))^2$$

$$V(B) = V(4X-5Y) = 16V(X) + 25V(Y)$$
$$= 16E(X^2) + 25E(Y^2) - 16(E(X))^2 - 25(E(Y))^2$$
$$V(A+B) = V(6X-2Y) = 36V(X) + 4V(Y) \neq V(A) + V(B)$$
$$V(A-B) = V(-2X+8Y) = 4V(X) + 64V(Y) \neq V(A) + V(B)$$

3°)

$$Cov(A.B) = E(A.B) - E(A).E(B)$$
$$= 8E(X^2) + 2E(XY) - 15E(Y^2) - (2E(X)+3E(Y))(4E(X)-5E(Y))$$
$$= 8V(X) - 15V(Y) + 2Cov(X.Y)$$
$$= 8V(X) - 15V(Y)$$

II)

1°) $F(x) = P(X < x)$

$G(y) = P(Y < y)$

soit

$H(z)$ = la fonction de répartition de la variable Z.

$$H(z) = P(Z < z) = P[\max(X,Y) < z]$$
$$= P[X < z \text{ et } Y < z] = P[X < z \cap Y < z]$$
$$= P(X < z).P[Y < z] = F(x).G(z)$$

$$\boxed{H(z) = F(z).G(z).}$$

2°) soit K (t) la fonction de répartition de la variable T.

$$K(t) = P[T < t] = P[\min(X, Y) < t] = P[X < t \text{ ou } Y < t]$$

$$P[(X < t) \cup (Y < t)] = P(X < t) + P(Y < t) - P(X < t).P(Y < t)$$

$$= F(t) + G(t) - F(t) - G(t).$$

$$\boxed{K(t) = F(t) + G(t) - F(t).G(t)}$$

IV. 16 :

a) Vrai : L'éspérance mathémathique peut prendre n'importe quelle valeur finie.

b) Faux = L'écart type est la racine carrée positive de la variance.

c) Vrai : E (X - h) = E (X) - h.

d) Faux : V (X + h) = V(X-h) = V(X). L'écart ne va pas changer.

e) Vrai :E (kX) = k E (X)

f) Faux : V (k X) = k^2 V (X). La variance va être multipliée par k^2.

g)Faux: emathémathique est une moyenne. La valeur la plus probable est la valeur modale.

i) Vrai : car $F(M) = \frac{1}{2}$ et $F(b) = 1$

j) Vrai car F (M) = 1/2.

k) Faux : La fonction de répartition prend ses valeurs sur [0,1]

l) Faux : La fonction de répartition prend ses valeurs sur [0,1]

m) Faux : La densité de probabilité est définie par $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

CHAPITRE V



LES VARIABLES ALEATOIRES CONTINUES A UNE DIMENSION

SECTION I : DEFINITION ET DENSITE DE PROBABILITE :

I. 1 : Définition :

La variable aléatoire X est dite continue si son domaine de définition est R ou une partie de R. (tout un intervalle).

I. 2 Densité de Probablité :

On appelle la fonction f, la distribution ou la densité où la loi de probabilité de v.a. continue X.

Cette fonction satisfait les 2 conditions suivantes :

i) $f(x) \geq 0 \qquad \forall x \in X.$

ii) $\int_{df} f(x)dx = 1$

ou df = domaine de définition de X.

Cela signifie que f est positive ou nulle et que l'aire totale en dessous de la courbe de f est égale à 1.

SECTION II : FONCTION DE REPARTITION

II. 1 Définition :

Soient X une v. a continue . On définit la fonction de répartition F de X par la fonction :

$F : IR \rightarrow IR$ telleque

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

II. 2 Propriétés :

La fonction F est une fonction monotone croissante c'est à dire :

* $F(x) \leq F(y)$ pour $x \leq y$.

* $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

La courbe cumulative est la représentation graphique d'une variable aléatoire continue.

Remarque :

Si la fonction F est continue et admet des dérivées, on dit que la v. a X est absolument continue. La distribution de probabilité de X dans ce cas est définie à partir de la fonction de répartition par :

$$F'(x) = f(x)$$

II . 3 : Probabilité attachée a un point et probabilité attachée a un intervalle

a) Probabilité attachée à un point :

La probabilité attachée à un point pour une variable continue est par définition égale à zéro.

$$P(X = x) = 0$$

b) Probabilité attachée à un intervalle :

Puisque la probabilité attachée à un point est nulle ; nous avons :

* $P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b)$

$= P(a < X \leq b) = F(b) - F(a).$

* $P(X \geq a) = P(X > a) = 1 - F(a)$

* $P(X \leq a) = P(X < a) = F(a)$

SECTION III : CARACTERISTIQUES

III. 1 : Espérance Mathémathique

a) Définition :

Soient X une v.a continue définie sur [a,b] et f(x) la d. d. p de cette v. a.

L'espérance mathémathique de X s'écrit dans ce cas :

$$E(X) = \int_a^b f(x)dx$$

b) Propriétés :

Toutes les propriétés que nous avons vu dans le cas de v. a discrète restent valables dans le cas de v. a continue.

III. 2 Variance :

a) Définition

La variance d'une v. a continue X est définie par :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \int_a^b x^2 f(x)dx - \left[\int_a^b xf(x)dx\right]^2$$

b) Propriétés :

Toutes les propriétés que nous avons vu dans le cas v. a discrète restent vérifiée dans le cas de v.a continue.

III .3 : les moments :

On appelle moment d'ordre K de la v. a X; l'éspérance mathématique de X^k

$$m_k = E(X^k) = \int_{df_X} x^k f(x)dx.$$

Cette notion peut être étendue à un couple de variable aléatoire (X; Y). On appelle moment d'ordre (r,s) et on note m_{rs} l'expression définie par :

$$m_{rs} = E(X^r Y^s) = \int_{df_X} \int_{df_Y} x^r y^s f(x,y)dx\,dy$$

III . 4 : la médiane

La médiane d'une v. a est une valeur numérique noté M_e ; telle qu'il y'a 50% des valeurs de la variable qui lui soient inférieures et 50% des valeurs de la variable qui lui soient supérieures.

Sa position est telle qu'elle divise la distribution en deux parties égales.

Si M_e est la valeur médiane de la v. a. X alors :

$$\boxed{P(X \leq M_e) = F(M_e) = 0{,}5}$$

Remarque :

On remarque que la distribution de fréquence relative cumulée sera d'une grande utilité par déterminuer la médiane.

III . 5 mode :

Le mode est la valeur de la v.a X à laquelle correspond le maximum de d. d. p.

Certaines distributions n'ont aucune valeur modale; d'autres en ont plusieurs.

III. 6 inégalité de bienaymé tchevbicheff :

Comme dans le cas de variables discrètes, cette inégalité est définie par :

$$P\left[|X - E(X)| > t\sigma\right] < \frac{1}{t^2}$$

$$P\left[|X - E(X)| \leq t\sigma\right] \geq 1 - \frac{1}{t^2}$$

$$P\left[E(X) - t\sigma \leq X \leq E(X) + t\sigma\right] \geq 1 - \frac{1}{t^2} \rightarrow$$

$$P\left[a \leq X \leq b\right] \geq 1 - \frac{1}{t^2} \rightarrow$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F\left[E(X) + t\sigma\right] - F(E(X) - t\sigma) \geq 1 - \frac{1}{t^2}$$

III. 7 : fonction génératrice des moments

Supposons qu'il existe un nombre positif $h / \forall -h \leq t \leq h$ l'expression mathémathique E (e^{tX}) existe.

On appelle fonction génératrice des moments de la v. a continue X la fonction définie par :

$$\mu_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx$$

Cette fonction nous permet d'avoir les moments des différents ordres.

En effet :

$$\left.\begin{array}{l} \mu'_X(0) = E(X) \\ \mu''_X(0) = E(X^2) \end{array}\right\} \rightarrow V(X) = \mu''_X(0) - \mu'_X(0))^2$$

et d'une façon générale $\mu^{(r)}_{(0)} = E(X^r)$ où $\mu^r(0)$ désigne la dérivée d'ordre r au point t = 0 de la fonction $\mu_X(t)$.

Propriétés :

La fonction génératrice des moments de la somme de deux v.a indépendantes est égale au produit de leurs fonctions génératrices.

En effet :

$$\mu_{X+Y}(t) = E\left[e^{t(X+Y)}\right] = E\left[e^{tX}.e^{tY}\right]$$

$$= E(e^{tX}).E(e^{tY}) = \mu_X(t).\mu_Y(t)$$

SECTION IV : CHANGEMENT DE VARIABLE ALEATOIRE :

Etant donnée une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est connue. On cherche la loi de probablité de la variable aléatoire Y définie par :

$$Y = \varphi(X) \text{ ou } X = \alpha(Y).$$

a) Si $\varphi(x)$ est monotone croissante :

A une valeur $x \in X$ correspond une valeur unique $y \in Y$ en particulier à :

$F(x) = P(X < x)$ (où F est la fonction de répartition de X)

Correspond :

$H(y) = P(Y < y) = P(X < \alpha(y))$ (où H est la fonction de répartition de y).

Soit

$$\boxed{H(y) = F(\alpha(y)).}$$

La densités des probabilités de la variable aléatoire Y est alors:

$$\boxed{h(y) = H'(y) = \frac{dH(y)}{dy} = \alpha'(y)f(\alpha(y))}$$

On remarquera qu'il est nécessaire que la transformation $\alpha(y)$soit continue

b) Si $\varphi(x)$ est monotone décroissante :

La fonction de répartition de Y s'écrit :

$H(y) = P(Y < y) = P(X \geq \alpha(y)) = 1 - F(\alpha(y))$

Puisque les valeurs de Y inférieures à y correspondent aux valeurs de X supérieures à x = α(y).

Sous réserve que α(y) soit continue on a la densité de probabilité de Y :

$$g(y) = -f(\alpha(y)).\alpha'(y).$$

Où α' (y) est négatif de sorte que g(y) est positif.

EXERCICES

V.1 :

Soit le modèle probabiliste suivant :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4-x}{10} & \text{si} \quad x \in [0,2] \\ \dfrac{1}{5} & \text{si} \quad x \in [2,4] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1°) Représenter graphiquement f(x) et vérifier qu'il s'agit d'une densité de probablité.

2°) Calculer la valeur modale.

3°) Déterminer la fonction de répartition correspondante et la représenter graphiquement.

4°) Déterminer la valeur médiane

5°) Déterminer l'éspèrance et la variance de X.

6) Déterminer a et b tel que :

$$P(a \leq X \leq 8) = \frac{1}{5} \qquad P(1 \leq X \leq b) = \frac{1}{2}$$

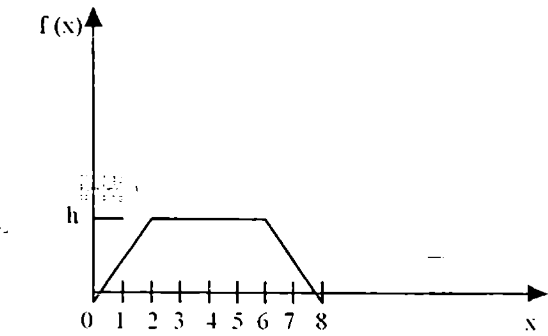
V. 2 :

Mêmes questions que V. 1 : avec

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{4} & \text{si} \quad x \in [0,2] \\ \dfrac{4-x}{4} & \text{si} \quad x \in [2,4] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

V. 3 :

Soit la représentation graphique d'une certaine densité de probablité.



1°) Déterminer h.

2°) Déterminer la densité de probabilité correspondante.

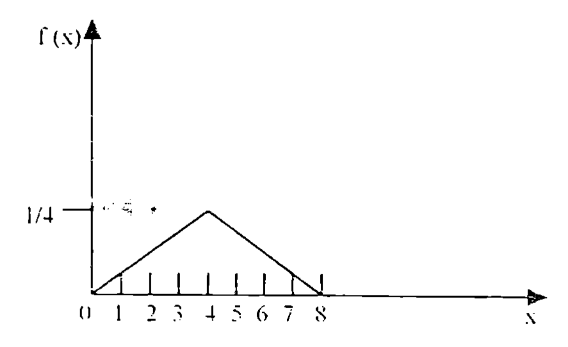
3°) Déterminer la fonction de répartition.

4°) Déterminer l'éspérance; la varaince; la valeur modale et la valeur médiane.

5°) Vérifier; pour la loi de probabilité étudiée ; l'inégalité de Bienaymé Tcheybicheff pour t = 2.

V. 4 :

Soit le modèle probabiliste suivant :



1°) Déterminer la densité de probabilité correspondante.

2°) Déterminer la fonction de répartition et tracer cette fonction.

3°) Calculer E (X) ; V (X) la valeur médiane et la valeur modale.

4°) Calculer la probabilité des événements suivants:

$P(-1 \le X \le 2)$; $P(1 \le X \le 5)$; $P(1 \le X \le 3)$; $P(5 \le X \le 7)$; $P(7 \le X \le 10)$; $P(-1 \le X \le 9)$

V. 5 :

La fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle est donnée par la formule suivante :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le 0 \\ ax^2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ 1 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

1°) Déterminer a et tracer cette fonction.

2°) Déterminer et tracer la densité de probabilité correspondante.

3°) Calculer l'éspérance ; et la variance ; la valeur modale et la valeur médiane.

V. 6 :

Soit :

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad \forall \quad x \in [0, a]$$

Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité.

V . 7 :

même question que V. 6 : avec

$$f(x) = \begin{cases} ax^2(100-x)^2 & \forall 0 \leq x \leq 100 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

IV. 8 :

Soit $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{a^2} & \text{si} \quad x \in [0,a] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1°) Vérifier que f(x) est une densité de probabilité $\forall x \in [0,a]$

2°) Déterminer la fonction de répartition correspondante.

3°) Déterminer $E(X)$; $E(X^2)$;… $E(X^n)$; $V(X)$; la valeur modale et la valeur médiane.

V. 9 :

Soit X une variable aléatoire admettant une densité de probabilité f (x) définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x^4} & \text{si} \quad x \geq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 1 \end{cases}$$

1°) Calculer E (X) et V (X).

2°) Soit $\varphi(h) = P(E(X) - h\sigma < X < E(X) + h\sigma)$ où $\sigma = \sqrt{V(X)}$

Montrer que $\varphi(h) \geq \dfrac{h^2 - 1}{h^2}$

3°) Calculer $\varphi(h)$

V. 10 :

Soit X une variable aléatoire uniformément distribuée sur $]0,1[$. On lui associe la variable aléatoire $Y = \sqrt{1 + X^2}$

1°) Montrer que $E(Y) = \int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$ et que $1 < E(Y) < \sqrt{2}$

2°) Calculer $E(Y^2)$

3°) Soit σ l'écart type de Y. Montrer que $\sigma^2 < \frac{1}{5}$

4°) On considére n variables aléatoires Y_i indépendantes ayant même loi que Y.

Quelle valeur faut-il donner à n pour que la différence : $\left|\frac{Y_1 + Y_2 \ldots\ldots\ldots Y_3}{n} - \int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx\right|$ soit inférieure à 0,001 avec une probabilité de 95%

Répondre à cette question :

a) à l'aide de l'inégalité de Tchebycheff.

b) à l'aide du Théorème central limite.

Indication : On ne connait pas exactement la valeur de σ, mais on en a une majoration qui permet de donner une réponse utilisable.

V. 11 :

On considére la densité de probabilité d'une variable aléatoire continue X définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} - \theta x^2 & \text{si} \quad x \in [-2,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1°) Déterminer θ

2°) Calcuer E (X) et V (X)

3°) Déterminer un intervalle $[a,b]$ centré sur E (X) tel que $P(a \leq X \leq b) = 0.95$

V. 12 :

Soit X une variable aléatoire dite de Paréto ; de densité

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda - 1}{x^{\lambda}} & \text{si} \quad x \geq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$$

Où λ est un paramètre inconnu.

1°) Déterminer la fonction de répartition de X.

2°) Pour quelle valeur de λ l'espérance et la variance existent

V. 13 :

On considére une variable aléatoire Xcontinue ayant pour fonction de répartition :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{2}{2 + x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1°) Représenter graphiquement F (x)

2°) Déterminer la valeur médiane.

3°)Déterminer et représenter graphiquement la densité de probabilité conrrespondante. En déduire la valeur modale.

4°) Calculer E (X). Conclusion

V. 14 :

Soit X une variable aléatoire continue de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x^{\lambda - 1} & \text{si} \quad x \in [0, a] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [0, a] \end{cases}$$

1°) Déterminer la valeur de a.

2°) Déterminer la fonction de répartition de X.

3°) On pose Y = - LogX.

Détreminer la densité de probabilité de Y.

4°) Calculer E(X) et V (X)

5°) Calculer E (Y) et V (Y)

V. 15 :

soit la fonction f définie par :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{k}e^{-\frac{x}{\theta}} & \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

1°) Calculer k pour que f soit une densité de probabilité.

2°) Soit la variable aléatoire X admettant f pour densité de probabilité. On pose $Y=\frac{X}{\theta}$

Calculer $P[Y<y]$; en fonction de la fonction de répartition de X. En déduire g (y).

V. 16 :

Soit la fonction f définie par :

$$f(x)=\begin{cases}6x(1-x) & \text{si} \quad 0<x<1 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Soit la variable Y = 2 X + 1

Déterminer la loi de Y.

V. 17 :

Soit la fonction f définie par :

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x\leq 0 \\ e^{-x} & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

1°) Déterminer la fonction de répartition de la variable X ayant f pour densité de probabilité

2°) Soit $Y_1 = \frac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y_1

3°) Soit $Y_2 = 2X$. Déterminer la loi de Y_2

4°) Soit $Y_3 = e^X$. Déterminer la loi de Y_3.

V. 18 :

Soit une variable aléatoire continue X dont la densité de probabilité est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si} \quad -1 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On pose $Y = X^2$

1°) Trouver la densité g (y) de la variable Y.

2°) Trouver la fonction de répartition G(y)

V. 19 :

Soit X et Y deux variables aléatoires continues indépendantes dont les densités sont définies par :

$f(x) = e^{-x}$ si $x > 0$

$h(y) = e^{-y}$ si $y > 0$

Soit $Z = X+Y$

Déterminer la densité de probabilité de Z.

V. 20 :

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ \dfrac{x}{a} & \text{si} \quad 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1°) Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité

2°) Soit la variable aléatoire X admettant f pour densité de probabilité ; quels sont les intervalles qui ont une probabilité nulle de contenir les réalisations de X?

3°) Déterminer la fonction de répartition F (x) de X.

4°) Dans quel intervalle se trouve nécessairement E (X).

Calculer E (X) et V (X).

V. 21 :

mêmes questions que V. 20 avec

$$f(x) = \begin{cases} x + K & \text{si} \quad -K \leq x < 0 \\ K - x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

V. 22 :

Soit une variable aléatoire X dont la fonction de répartition est définie par :

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

On pose :

$$Y_1 = e^X$$

$$Y_2 = \frac{1}{1 + e^{-X}}$$

Déterminer les lois de Y_1 et Y_2

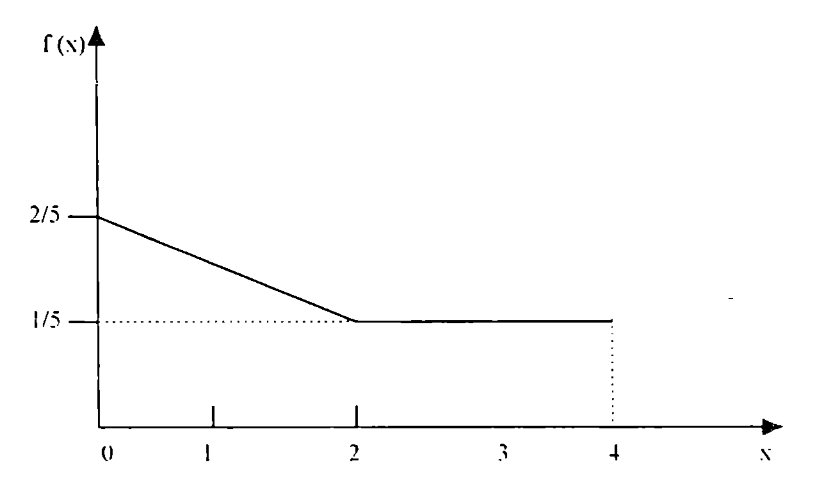
SOLUTIONS PROPOSEES

V. 1:

Nous avons :

1°)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4-x}{10} & \text{si } x \in [0,2] \\ \frac{1}{5} & \text{si } x \in [2,4] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Représentation graphique de la d.d.p

$$\int_{df} f(x)dx = \int_0^2 \frac{4-x}{10}dx + \int_2^4 \frac{1}{5}dx = \frac{1}{10}\left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \left[\frac{x}{5}\right]_2^4$$

$$= \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1.$$

2°) La valeur modale est $x = 0$.

En effet $f(0) = \frac{2}{5}$ et $\forall x \in df$ et $x \neq 0$; nous avons $f(x) < \frac{2}{5}$

3°) fonction de répartition :

$\forall x \in]-\infty,0]$; $f(x) = 0 \rightarrow F(x) = 0.$

$\forall x \in [0,2]$; $f(x) = \dfrac{4-x}{10} \rightarrow$

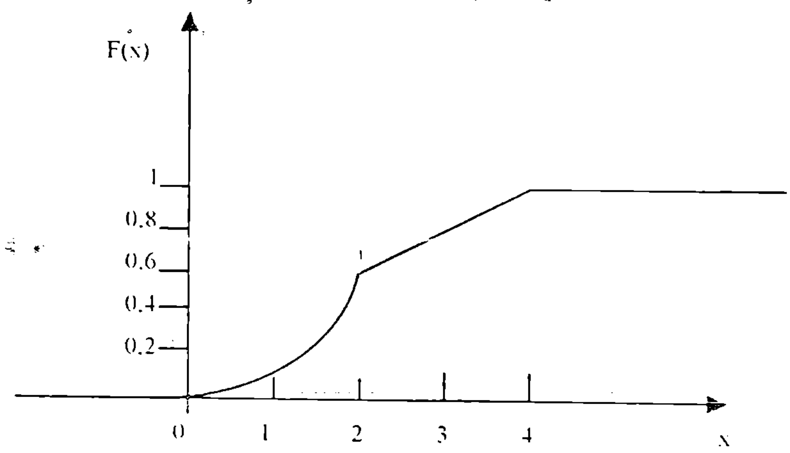
$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{4-t}{10}dt = \frac{1}{10}\left[4x - \frac{x^2}{2}\right]$$

$$\forall x \in [2,4];\quad F(x) = \frac{1}{10}\left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \int_2^x \frac{1}{5}dt = \frac{x+1}{5}.$$

$\forall x \in [4,+\infty[$; $F(x) = 1.$

En résumé :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty,0] \\ \dfrac{1}{10}\left[4x - \dfrac{x^2}{2}\right] & \text{si } x \in [0,2] \\ \dfrac{x+1}{5} & \text{si } x \in [2,4] \\ 1 & \text{si } x \in [4,+\infty[\end{cases}$$



Représentation graphique de la fonction de répartition.

4°) Valeur médiane :

x est une valeur médiane si $F(x) = \frac{1}{2}$

$$x \in [0,2] \rightarrow x / \quad \frac{1}{10}\left[4x - \frac{x^2}{2}\right] = 0{,}55 \rightarrow$$

$$\frac{-x^2}{2} + 4x - 5 = 0 \rightarrow x^2 - 8x + 10 = 0$$

$$\Delta' = 16 - 10 = 6$$

$$x_1 = 4 - \sqrt{6} \approx 1{,}5 \quad \in [0,2]$$

$$x_2 = 4 + \sqrt{6} \notin [0,2]$$

$$\boxed{M_e \approx 1{,}55}$$

5°)

$$E(X) = \int_{df} xf(x)dx = \int_0^2 \frac{4x - x^2}{10}dx + \int_2^4 \frac{x}{5}dx = 1{,}73$$

$$E(X^2) = \int_{df} x^2 f(x)dx = \int_0^2 \frac{4x^2 - x^3}{10}dx + \int_2^4 \frac{x^2}{5}dx = 4{,}4$$

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1{,}41}$$

6°)

a et b $\quad / P(a \leq X \leq 8) = \frac{1}{5}$

$$P(1 \leq X \leq b) = \frac{1}{10}$$

$$P(a \leq X \leq 8) = F(8) - F(a) = \frac{1}{5} \rightarrow F(a) = \frac{4}{5} \rightarrow$$

$$\frac{a+1}{5} = \frac{4}{5} \rightarrow \quad \boxed{a = 3}$$

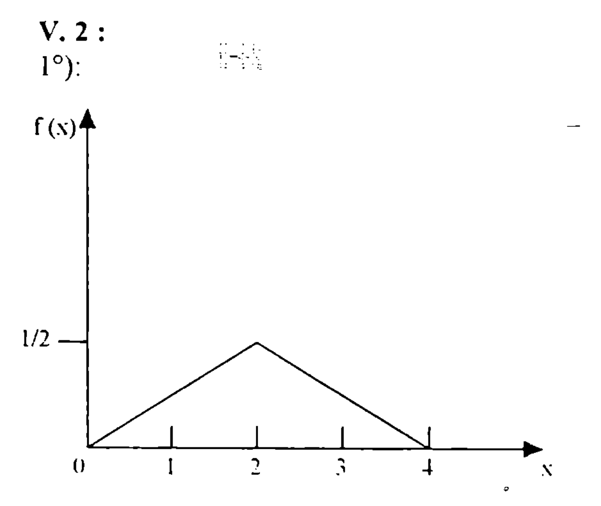
$$P(1 < X \leq b) = \frac{1}{10} \rightarrow F(b) - F(1) = \frac{1}{10} \rightarrow$$

$$F(b) = \frac{1}{10} + F(1) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}\left[4 - \frac{1}{2}\right] = \frac{9}{20} \rightarrow$$

$$\frac{1}{10}\left[4x - \frac{x^2}{2}\right] = \frac{9}{20} \rightarrow \qquad \boxed{b = 4 - \sqrt{7}}$$

V. 2 :

1°):



Représentation graphique de la d.d.p.

$$\int_{df} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0.dx + \int_{0}^{2} \frac{x}{4}dx + \int_{2}^{4} \frac{4-x}{4}dx + \int_{4}^{+\infty} 0.dx = 1 \rightarrow$$

f(x) est une densité de probabilité

2°) x = 2 est une valeur modale.

3°)

$\forall x \in \left]-\infty, 0\right]$; $f(x) = 0 \rightarrow F(x) = 0.$

$\forall x \in [0,2]$; $f(x) = \frac{x}{4} \rightarrow F(x) = \int_{0}^{x} \frac{t}{4}dt = \frac{x^2}{8}$

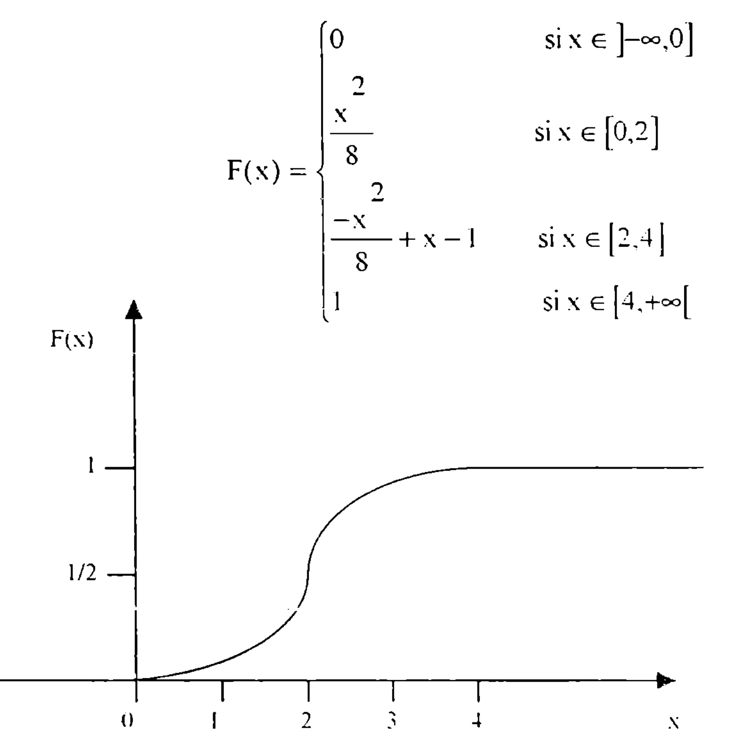
$\forall x \in [2,4]$; $f(x) = \dfrac{4-x}{4} \rightarrow F(x) = \left[\dfrac{x^2}{8}\right]_0^2 + \int_2^x \dfrac{4-t}{4}\,dt =$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left[4t - \frac{t^2}{2}\right]_2^x = \frac{-x^2}{8} + x - 1.$$

$\forall x \in [4+, \infty[$; $F(x) = 1.$

En résumée :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ \dfrac{x^2}{8} & \text{si } x \in [0,2] \\ \dfrac{-x^2}{8} + x - 1 & \text{si } x \in [2,4] \\ 1 & \text{si } x \in [4, +\infty[\end{cases}$$



Représentation graphique de la fonction de répartition.

4°) Valeur médiane x = 2 puisque F (x) = 0,5 (il s'agit aussi d'une distribution symétrique).

5°)

$$E(X) = \int_{df} xf(x)dx = \int_0^2 \frac{x^2}{4}dx + \int_2^4 \frac{4x - x^2}{4}dx = 2$$

$$E(X^2) = \int_{df} x^2 f(x)dx = \int_0^2 \frac{x^3}{4}dx + \int_2^4 \frac{4x^2 - x^3}{4}dx = 4{,}66$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 0{,}66$$

6°)

$$P(a \le X \le 8) = \frac{1}{5} \rightarrow F(8) - F(a) = \frac{1}{5} \rightarrow$$

$$1 - F(a) = \frac{1}{5} \rightarrow F(a) = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

$$\rightarrow a \in [2{,}4] \rightarrow -\frac{a^2}{8} + a - 1 = 0{,}8 \rightarrow -\frac{a^2}{8} + a - 1{,}8 = 0 \rightarrow a = 2{,}74$$

$$p(1 \le X \le b) = \frac{1}{10} \rightarrow F(b) - F(1) = \frac{1}{10}$$

$$F(b) - \frac{1}{8} = \frac{1}{10} \rightarrow F(b) = \frac{9}{40}$$

$$\rightarrow \frac{b^2}{8} = \frac{9}{40} \rightarrow b = \sqrt{\frac{9x8}{40}} = 1{,}34$$

V. 3 :

1°) h est tel que la surface sous la courbe est égale à 1.

$\rightarrow h + 4h + h = 6\,h = 1 \rightarrow h = \frac{1}{6}$

2°) Détermination de la densité de probabilité :

$x \in [0{,}2]$

$f(x) = ax + b$ avec $f(0) = 0 \Rightarrow b = 0$

$$f(2) = 2a = \frac{1}{6} \rightarrow a = \frac{1}{12} \rightarrow f(x) = \frac{x}{12}$$

Pour $x \in [2,6]$ $\qquad f(x) = \frac{1}{6}$

Pour $x \in [6,8]$ $\qquad f(x) = ax + b$

Avec:

$$\left.\begin{array}{l} (6) = 6a + b = \frac{1}{6} \\ f(8) = 8a + b = 0 \end{array}\right\} a = \frac{-1}{12} \text{ et } b = \frac{2}{3} \rightarrow f(x) = -\frac{x}{12} + \frac{2}{3}$$

Conclusion :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{12} & \text{si} \quad x \in [0,2] \\ \frac{1}{6} & \text{si} \quad x \in [2,6] \\ \frac{-x}{12} + \frac{2}{3} & \text{si} \quad x \in [6,8] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

3°) F (x) ? ?

si $x \in]-\infty,0]$ $\qquad f(x) = 0 \rightarrow F(x) = 0.$

si $x \in [0.2]$ $\qquad f(x) = \frac{x}{12} \rightarrow F(x) = \frac{x^2}{24}.$

si $x \in [2.6]$;

$$F(x) = \left[\frac{x^2}{24}\right]_0^2 + \frac{1}{6}\int_2^x dt = \frac{x}{6} - \frac{1}{6} = \frac{x-1}{6}$$

si $x \in [6,8]$

$$F(x) = \left[\frac{x^2}{24}\right]_0^2 + \left[\frac{x-1}{6}\right]_2^6 + \int_6^x \left[\frac{-t}{12} + \frac{2}{3}\right]dt =$$

$$\frac{-x^2}{24} + \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in]-\infty,0] \\ \frac{x^2}{24} & \text{si} \quad x \in [0,2] \\ \frac{x-1}{6} & \text{si} \quad x \in [2,6] \\ \frac{-x^2}{24} + \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} & \text{si} \quad x \in [6,8] \\ 1 & \text{si} \quad x \in [8,+\infty[\end{cases}$$

4°) $E(X) = \int_{df} xf(x)dx = \int_0^2 \frac{x^2}{12}dx + \int_2^6 \frac{x}{6}dx$

$$+\int_6^8 (-\frac{x^2}{12} + \frac{2}{3}x)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{36}\right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{12}\right]_2^6 + \left[\frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{36}\right]_6^8 = 4.$$

$$E(X^2) = \int_{df} x^2 f(x)dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{48}\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{18}\right]_2^6 + \left[+\frac{2}{9}x^3 - \frac{x^4}{48}\right]_6^8 = 18{,}2$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2{,}2 \rightarrow \sigma_X \approx 1{,}5$$

Valeur modale : Nous avons un intérvalle modale. Il s'agit de tout $x \in [2.6]$. La densité de probabilité est à son maximum sur cet intervalle.

Valeur médiane :

$$x / F(x) = 0{,}5 \to x \in [2{,}6] \to \frac{x-1}{6} = 0{,}5 \to$$

x = 4 = E(X). Il s'agit d'une distribution symétrique.

5°) Inégalité de Bienaymé Tchebycheff pour t = 2.

Nous avons :

$$P(|X - E(X)| \leq t\sigma) = P(E(X) - t\sigma \leq X \leq E(X) + t\sigma) \geq 1 - \frac{1}{t^2}$$

Pour t = 2 ; E (X) = 4 et $\sigma_x = 1.5$; cette inégalité s'écrit :

$$P(1.5 \leq X \leq 6.5) \geq \frac{3}{4}$$

Vérification :

$$P(1{,}5 \leq X \leq 6{,}5) = F(6{,}5) = \frac{5{,}5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4{,}5}{6} = \frac{3}{4}$$

et l'inégalité est vérifiée.

V . 4 :

Nous pouvons commencer par vérifier que f(x) définie bien une densité de probabilité (d.d.p)

Aire sous la courbe est égale à $\frac{8 . \frac{1}{4}}{2} = 1 \to f(x)$ est une d.d.p.

1°) $f(x) = 0 \quad \forall x \in]-\infty, 0]$

$$f(x) = ax + b \, \forall x \in [0.4] \quad \text{Avec} \begin{cases} f(0) = 0 \to b = 0 \\ f(4) = 4a = \frac{1}{4} \to a = \frac{1}{16} \end{cases}$$

$$\to f(x) = \frac{x}{16}$$

$$f(x) = ax + b \quad \forall x \in [4.8] \quad \text{Avec} \quad f(4) = 4a + b = \frac{1}{4}$$

$$f(8) = 8a + b = 0$$

$$a = -\frac{1}{16} \text{ et } b = \frac{1}{2}$$

$$\to f(x) = -\frac{x}{16} + \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{16} & \forall x \in [0,4[\\ -\frac{x}{16} + \frac{1}{2} & \forall x \in [4,8[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

2°) Fonction de répartition correspondante :

$\forall x \in]-\infty,0]; \quad f(x) = 0 \rightarrow 0.$

$$\forall x \in]0,4]; \quad f(x) = \frac{x}{16} \rightarrow F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{t}{16}dt$$

$$= \frac{x^2}{32}$$

$$\forall x \in [4,8[\quad ; f(x) = -\frac{x}{16} + \frac{1}{2} \rightarrow F(x) = \left[\frac{x^2}{32}\right]_0^4 +$$

$$+ \int_4^x f(t)dt = \frac{1}{2} + \left[-\frac{t^2}{32} + \frac{t}{2}\right]_4^x$$

$$= -\frac{x^2}{32} + \frac{1}{2}x - 1$$

$\forall x \in [8,+\infty[\qquad F(x) = 1 \rightarrow$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in]-\infty,0] \\ \frac{x^2}{32} & \forall x \in [0,4[\\ -\frac{x^2}{32} + \frac{x}{2} - 1 & \forall x \in [4,8[\\ 1 & \forall x \in [8,+\infty[\end{cases}$$

$$3°)E(X) = \int_{df} x(f)dx = \int_0^4 \frac{x^2}{16}dx + +\int_4^8 (-\frac{x^2}{16} + \frac{x}{2})dx = 3{,}875$$

$$E(X^2) = \int_{df} x^2 f(x)dx = \int_0^4 \frac{x^3}{16}dx + \int_4^8 (-\frac{x^3}{16} + \frac{x^3}{2})dx = 18{,}66$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \approx 3{,}65$$

Nous avons aussi : valeur modale = Valeur médiane = 4 puisque c'est une courbe symétrique.

$4°)P(-1 \leq X \leq 2) = F(2) - F(-1) = F(2) = \frac{1}{8}$

$P(1 \leq X \leq 5) = F(5) - F(1) = \frac{+1}{16}$

$P(1 \leq X \leq 3) = F(3) - F(1) = \frac{1}{4}$

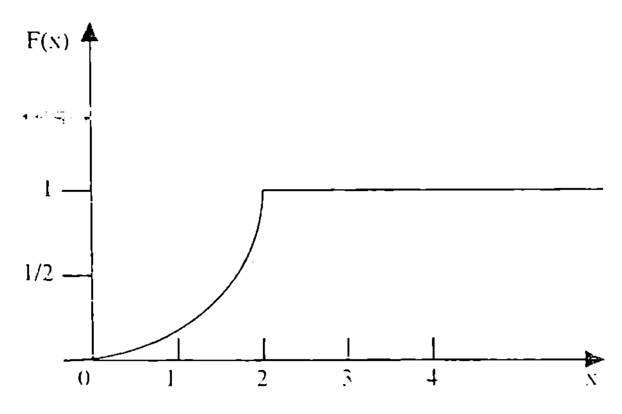
$P(5 \leq X \leq 7) = F(7) - F(5) = \frac{1}{4}$

$P(7 \leq X \leq 10) = F(10) - F(7) = 1 - F(7) = \frac{11}{32}$

$P(-1 \leq x \leq 9) = F(9) - F(-1) = 1$

V. 5 :

1°) La fonction de répartition est une fonction continue et croissante; donc $F(2^-)F(2^+) = F(2) \rightarrow 4a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{4}$



Représentation graphique de la fonction de répartition.

2°) $f(x) = F'(x) \rightarrow$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si} \quad x \in [0,2] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$3°) E(X) = \int_{df} x f(x)dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2}dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

$$E(X^2) = \int_{df} x^2 f(x)dx = \int_0^2 \frac{x^3}{2}dx = \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^2 = 2$$

$$V(X) = 2 - (\frac{4}{3})^2 = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$$

Valeur modale = 2

La valeur médiane est telle que $F(x) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{1}{2}$

$$\boxed{x = \sqrt{2}}$$

V. 6 :

$f(x) = \frac{x}{1+x} \quad \forall x \in [0.a]$. Pour que f (x) soit une densité de probabilité; il faut que :

i) $f(x)$ soit $\geq 0 \quad \forall x \in df$

ii) $\int_{df} f(x)dx = 1$

Vérifions ces 2 conditions sur notre exercice :

i) $f(x) \geq 0$ est verifiée puisque $x \in [0.a]$

ii) $\int_0^a f(x)dx = 1 \rightarrow$

$$\int_0^a \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$\frac{1}{2}\left[\text{Log}(1+x^2)\right]_0^a \Rightarrow \text{Log}(1+a^2) = 2 \rightarrow (1+a^2) = e^2$$

$$\boxed{a = \sqrt{e^2 - 1}}$$

V. 7 :

i) $f(x) \geq 0$ est vérifié puisque $f'(x) > 0$

ii) $a\int_0^{100} f(x)dx = a\int_0^{100} x^2 (100-x)^2 dx$

$$= a\left[10000\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - 200\frac{x^4}{4}\right]_0^{100} = 1$$

$$a(100)^3\left[\frac{10000}{3} - 3000\right] = 1 \rightarrow$$

$$\boxed{a = \frac{3}{10.(100)^4} = \frac{3}{10^9}}$$

V. 8 :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{a^2} & \forall x \in [0,a] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1°)

$$\left.\begin{array}{l} \int_0^a f(x)dx = \frac{1}{a^2}\left[x^2\right]_0^a = \frac{a^2}{a^2} = 1 \\ f(x) \geq 0 \, \forall x \in [0,a] \end{array}\right\} \rightarrow f(x) \text{ est une densité de probabilité } \forall a.$$

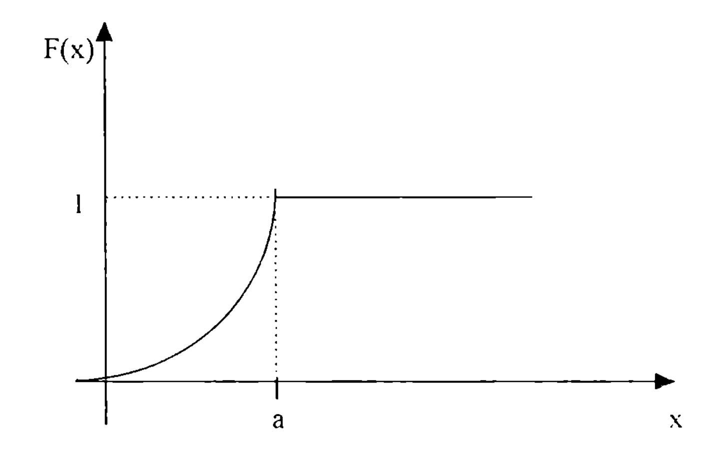
2°) Fonction de répartition :

$\forall x \in \left]-\infty,0\right] \to f(x) = 0 \to F(x) = 0.$

$\forall x \in \left]0, a\right] \to f(x) = \dfrac{2x}{a^2} \to F(x) = \dfrac{1}{a^2}\int_0^x 2t\,dt = \dfrac{x^2}{a^2}$

$\forall x \in \left[a, \infty\right[\to F(x) = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq a \\ 1 & \text{si} \quad x \geq a. \end{cases}$$



Représentation graphique de la fonction de Répartition

$3°) E(X) = \int_0^a x f(x)dx = \int_0^a \dfrac{2x^2}{a^2}dx = \dfrac{2}{a^2}\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^a = \dfrac{2}{3}a$

$E(X^2) = \int_0^a \dfrac{2}{a^2}x^3dx = \dfrac{2}{4}\dfrac{a^4}{a^2} = \dfrac{1}{2}a^2$

$$E(X^n)\ \int_0^a \frac{2}{a^2}x^{n+1}dx = \frac{2}{a^2}\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^a = \frac{2}{a^2}\frac{a^{n+2}}{n+2}$$

$$\boxed{E(X^n) = \frac{2}{a^2}\frac{a^{n+2}}{n+2} = 2\frac{a^n}{n+2}}$$

$$V(X^n) = E(X^{2n}) - (E(X^n))^2$$

$$= 2\frac{a^{2n}}{2n+2} - \left(2\frac{a^n}{n+2}\right)^2$$

$$= \frac{a^{2n}}{n+1} - \left(2\frac{a^n}{n+2}\right)^2 = \frac{a^{2n}}{n+1} - \frac{4a^{2n}}{(n+2)^2}$$

$$\boxed{V(X^n) = \frac{a^{2n}}{n+1} - \frac{4a^{2n}}{(n+2)^2}}$$

Ainsi $V(X) = \frac{a^2}{18}$; $V(X^2) = \frac{a^4}{12}$ .....

Valeur modale = a

Valeur médiane / $\frac{x^2}{a^2} = \frac{1}{2} \rightarrow$ $\boxed{x = \sqrt{\frac{a}{2}}}$

V.9 :

1°)

$$E(X) = \int_1^{+\infty} 3\frac{x}{x^4}dx = \int_1^{+\infty} 3x^{-3} = 3\left[\frac{-x^{-2}}{2}\right]_1^{+\infty} = \frac{3}{2}$$

$$E(X^2) = \int_1^{+\infty} 3\frac{x^2}{x^4}dx = 3\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = 3\left[\frac{-1}{x}\right]_1^{+\infty} = 3.$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{3}{4}$$

2°)

$\varphi(h) = P(E(X) - \sigma h < X < E(X) + \sigma h) \rightarrow$

$\varphi(h) = P(|X - E(x)| < h\sigma)$

D'après l'inégalité de Bienaymé Tcheybicheff :

$P(|X - E(X)| \leq \sigma h) \geq 1 - \frac{1}{h^2} \rightarrow$

$$\boxed{\varphi(h) \geq 1 - \frac{1}{h^2} = \frac{h^2 - 1}{h^2}}$$

3°) $\varphi(h) = P(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}h \leq X \leq \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}h)$

$$= \int_{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}} f(x)dx = \int_{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}h}^{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}h} \frac{3}{x^4}dx = \left[\frac{-1}{x^3}\right]_{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}h}^{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}h}$$

$$= \frac{8}{(3-\sqrt{3}h)^3} - \frac{8}{(3+\sqrt{3}h)^3}$$

V.10 :

X est une variable uniformement distribuée sur $]0,1[$

$Y = \sqrt{1+X^4} \rightarrow Y^2 = 1 + X^4 \rightarrow (Y^2 - 1)^{\frac{1}{4}} = X$

$\rightarrow G(yP(Y \leq y) = P(X \leq (y^2 - 1)^{\frac{1}{4}}) = (y^2 - 1)^{\frac{1}{4}}$ puisque X est une uniformement répartie.

D'où la densité de y est :

Si $x \in]0,1[\rightarrow y \in]1,\sqrt{2}[$

Ainsi :

$$g(y) = \begin{cases} \left[(y^2 - 1)^{\frac{1}{4}}\right]' & \text{si} \quad y \in]1,\sqrt{2}[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}y(y^2 - 1)^{-\frac{3}{4}} & \text{si} \quad 1 < y < \sqrt{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$E(Y) = \int_1^{\sqrt{2}} y g(y) dy = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{2} y^2 (y^2-1)^{-\frac{3}{4}} dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}(1+x^4)(x^4)^{-\frac{3}{4}} \frac{4}{2} x^3 (1+x^4)^{-\frac{1}{2}} dx = \int_0^1 (1+x^4)^{\frac{1}{2}} dx$$

En effet ; nous savons que :

$$y = \sqrt{1+x^4} = (1+x^4)^{\frac{1}{2}}$$

$$dy = \frac{1}{2} 4x^3 (1+x^4)^{\frac{1}{2}-1} dx = 2x^3 (1+x^4)^{-\frac{1}{2}} dx$$

Donc :

$$\frac{1}{2}(1+x^4)(x^4)^{-\frac{3}{4}} 2x^3 (1+x^4)^{-\frac{1}{2}} = (1+x^4)^{\frac{1}{2}} x^{-3} x^3 = (1+x^4)^{\frac{1}{2}}$$

$$E(Y) = \int_0^1 (1+x^4)^{\frac{1}{2}} dx$$

On sait aussi que :

$$\sqrt{1+x^4} > \sqrt{1} \rightarrow E(Y) = \int_0^1 (1+x^4)^{\frac{1}{2}} dx > \int_0^1 \sqrt{1} dx = 1$$

$$\boxed{E(Y) > 1}$$

$$\sqrt{1+x^4} < \sqrt{2} \rightarrow E(Y) < \sqrt{2}\int_0^1 dx = \sqrt{2}$$

$$\boxed{E(Y) < \sqrt{2}}$$

D'où $\boxed{1 < E(Y) < \sqrt{2}}$

$$E(Y^2) = \int_1^{\sqrt{2}} y^2 g(y)dy = \int_1^{\sqrt{2}} y.yg(y)dy$$

$$\int_0^1 y(1+x^4)^{\frac{1}{2}} dx = \int_0^1 (1+x^4)^{\frac{1}{2}} (1+x^4)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\int_0^1 (1+x^4)dx = \left[x + \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{6}{5}$$

$$\boxed{E(Y^2) = \frac{6}{5}}$$

3°)

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{6}{5} - (E(Y))^2 < \frac{6}{5} - 1 = \frac{1}{5}$$

$$\boxed{\sigma^2 < \frac{1}{5}}$$

4°) On pose $S_n = Y_1 + Y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots Y_n$

a) D'après l'inégalité de Bineymé Tchéybicheff: on a :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y)\right| < 0{,}001\right) \geq 1 - \frac{V(Y)}{nt^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{nt^2}.$$

En effet; nous avons :

$$V(\frac{S_n}{n}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{V(Y_i)}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} < \frac{1}{5n}$$

$$t^2 = 0{,}001.0{,}001 = 10^{-6}$$

Ainsi :

$$1-\frac{\sigma^2}{nt^2} > 1-\frac{1}{5nt^2}$$

$$1-\frac{V(Y)}{n10^{-6}} > 1-\frac{1}{5nt^2} = 1-\frac{1}{5n10^{-6}}$$

On veut dire que :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y)\right| < 0{,}001\right) = 0{,}95 \rightarrow$$

$$0{,}95 > 1-\frac{1}{5n10^{-6}} \rightarrow$$

$$0{,}05 < 1-\frac{1}{5n10^{-6}} \rightarrow \frac{1}{5n10^{-6}} < 0{,}95 \rightarrow$$

$$\frac{1}{n} < 5x10^{6}x0{,}95 \rightarrow$$

$$\boxed{n > 4000000}$$

b) Utilisation du théorème central limite
Nous savons à partir de ce théorème; que quand $n \rightarrow +\infty$; nous avons :

$$\frac{\frac{S_n}{n} - E(Y)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \rightarrow N(0,1)$$

$$\lim_{n\rightarrow\infty} P\left(\left|\frac{\frac{S_n}{n} - E(Y)}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < \frac{0{,}001}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0{,}95$$

$$\pi\left(\frac{0{,}001}{\sigma/\sqrt{n}}\right)-\pi\left(\frac{-0{,}001}{\sigma/\sqrt{n}}\right)=0{,}95$$

$$=2\pi\left(\frac{0{,}001}{\sigma/\sqrt{n}}\right)-1=0{,}95\rightarrow$$

$$\pi\left(\frac{0{,}001}{\sigma/\sqrt{n}}\right)=0{,}975\rightarrow$$

$$\left(\frac{0{,}001}{\sigma/\sqrt{n}}\right)=1{,}96\rightarrow$$

$$\sqrt{n}=\frac{1{,}96.\sigma}{0{,}001}\rightarrow n=\left(\frac{1{,}96.\sigma}{0{,}001}\right)^2$$

$$\boxed{n<\frac{(1{,}96)^2}{5\mathrm{x}10^{-6}}\approx 800.000}$$

N.B : Pour une définition du théorème central limite : le lecteur peut se reférer au 2ème chapitre du tome II.

V. 11 :

1°)

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx=1\Rightarrow\int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{8}-\theta x^2\right)dx=\left[\frac{1}{8}x-\theta\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}=\rightarrow$$

$$\left[\frac{2}{8}-\theta\frac{8}{3}\right]-\left[-\frac{2}{8}+\theta\frac{8}{3}\right]=1\rightarrow\frac{1}{2}-\frac{16}{3}\theta=1\rightarrow$$

$$\boxed{\theta=-\frac{3}{32}}$$

2°) $E(X)=\int_{-2}^{2} xf(x)dx=\int_{-2}^{2} x\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{32}x^2\right)dx=0$. Il s'agit d'une distribution centrée.

$$V(X)=E(X^2)=\int_{-2}^{2} x^2 f(x)dx=\int_{-2}^{2} x^2\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{32}x^2\right)dx=\frac{28}{15}$$

3°)

$$\frac{a+b}{2} = E(X) = 0 \rightarrow a+b = 0 \rightarrow a = -b.$$

$$P(-b \leq X \leq b) = 0{,}95 \rightarrow \int_{-b}^{b} \left(\frac{1}{8}+\frac{3}{32}x^2\right)dx = 0{,}95 \rightarrow$$

$$b^3 + 4b = 15{,}2 \rightarrow b \approx 1{,}95.$$

Donc ; l'intervalle cherché est $\left[-1.95 \quad 1.95\right]$

V. 12 :

1°) Détermination de la fonction de répartition :

*Si $x<1$; $f(x)=0 \rightarrow F(x)=0.$

*Si $x \geq 1$; $f(x)=\frac{\lambda-1}{x^{\lambda}} \rightarrow F(x)=\int_1^x f(t)dt=$

$$\int_1^x (\lambda-1)t^{-\lambda}dt=(\lambda-1)\left[\frac{t^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}\right]_1^x=\frac{\lambda-1}{1-\lambda}\left[t^{1-\lambda}\right]_1^x$$

$$=1-x^{1-\lambda}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<1 \\ 1-x^{1-\lambda} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

2°)

$$E(X) = \int_1^{\infty} xf(x)dx = \int_1^{+\infty} (\lambda-1)x^{1-\lambda}dx = \frac{\lambda-1}{2-\lambda}\left[x^{-\lambda+2}\right]_1^{+\infty}$$

Pour que l'éspérance existe λ doit être supérieur à 2.

Pour $\lambda > 2$ $\qquad E(X) = \frac{\lambda-1}{2-\lambda}$

$$E(X^2) = \int_1^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_1^{+\infty} (\lambda - 1)x^{2-\lambda}dx = \frac{\lambda - 1}{3 - 3}\left[x^{-\lambda+3}\right]_1^{+\infty}$$

Pour que $E(X^2)$ existe λ doit être supérieur à 3.
Pour $\lambda>3$.

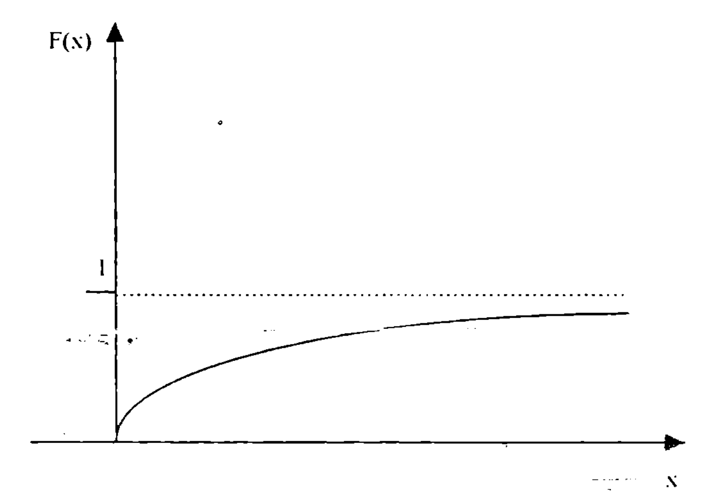
$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{\lambda - 1}{\lambda - 3} - \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda - 2}\right)^2$$

$$= \frac{(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 - (\lambda - 1)^2(\lambda - 3)}{(\lambda - 3)(\lambda - 2)^2} = \frac{(\lambda - 1)\left[(\lambda - 2)^2 - (\lambda - 1)(\lambda - 3)\right]}{(\lambda - 3)(\lambda - 2)^2}$$

$$= \frac{\lambda - 1}{(\lambda - 3)(\lambda - 2)^2} \quad ; \quad \boxed{V(X) = \frac{\lambda - 1}{(\lambda - 3)(\lambda - 2)^2}}$$

V . 13 :

1°) Par définition ; la fonction de répartition est croissante sur $[0.1]$ $\forall x \in Df$.



Représentation graphique de la fonction de répartition

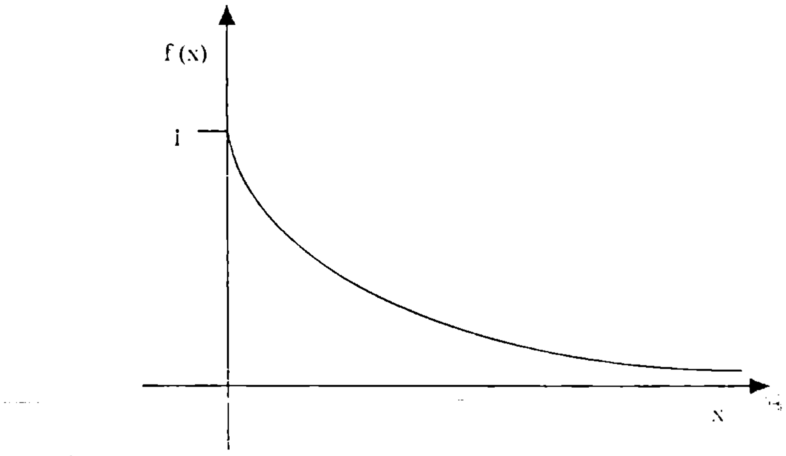
2°) Soit M_e la valeur médiane de X.

$M_e \,/\, F(M_e) = 0{,}5 \rightarrow 1 - \dfrac{2}{2+M_e} = 0{,}5 \rightarrow$

$$\boxed{M_e = 2}$$

3°) La fonction de répartition F(x) est continue et possède une dérivée à droite et une dérivée à gauche pour tout $x \in X$. La densité de probabilité de X éxiste, et, est définie par :
f(x) = F' (x).

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{2}{(2+x)^2} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$



Représentation graphique de la densité de probabilité.

La valeur modale est donnée par x = 1

4°)

$$E(X)=\int_0^{+\infty} xf(x)dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x+2)^2}dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{x+2-2}{(x+2)^2}dx$$

$$= 2\left[\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+2)}dx + \int_0^{+\infty} \frac{-2}{(x+2)^2}dx\right]$$

$$= 2\left[\mathrm{Log}(x+2)+\frac{2}{(x+2)}\right]_0^{+\infty} = +\infty$$

L'espérance mathémathique n'est pas définie

V. 14 :

1°) $\int_0^a f(x)dx = 1 \to \left[x^{\lambda}\right]_0^a = 1 \to a = 1.$

2°) Détermination de la fonction de répartition :

*Si $x < 0$; $f(x) \to F(x) = 0$

*Si $x \in [0,1]$; $f(x) = \lambda x^{\lambda-1} \to F(x) = x^{\frac{1}{\lambda}}$

*Si $x \geq 1$; $F(x) = 1.$

En résumée :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^{\frac{1}{\lambda}} & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

3°)

$Y = -\mathrm{Log}\, X$. Soit $G(y)$ la fonction de répartition de Y

$G(y) = P(Y < y) = P(-\mathrm{Log}X < y) = P(X > e^{-Y})$

$$= 1 - P(X < e^{-Y}) = 1 - F(e^{-Y}) = 1 - e^{-\frac{Y}{\lambda}} \quad \text{si} \quad y > 0$$

$$G(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y < 0 \\ 1 - e^{\frac{-y}{\lambda}} & \text{si} \quad y \geq 0. \end{cases}$$

La densité de probabilité est définie par g (y) = G' (y)

$$g(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y < 0 \\ \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{y}{\lambda}} & \text{si} \quad y > 0 \end{cases}$$

4°)

$$E(X) = \int_0^1 \frac{1}{\lambda} x^{\frac{1}{\lambda}} dx = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{x^{\frac{1}{\lambda}+1}}{\frac{1}{\lambda}+1} \right]_0^1 = \frac{1}{1+\lambda} \qquad \lambda \neq -1$$

$$E(X^2) = \int_0^1 \frac{1}{\lambda} x^{\frac{1}{\lambda}+1} dx = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{x^{\frac{1}{\lambda}+2}}{\frac{1}{\lambda}+2} \right]_0^1 = \frac{1}{1+2\lambda} \quad \lambda \neq -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{V(X) = E(X^2) = (E(X))^2 = \frac{\lambda^2}{(1+2\lambda)(1+\lambda)^2}}$$

$$\lambda \neq -1 \quad \text{et} \quad \lambda \neq -\frac{1}{2}$$

comme $V(X) > 0 \rightarrow \lambda > -\frac{1}{2}$

5°) $E(Y) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda} y e^{\frac{-y}{\lambda}} dy$

Intégration par parties:
$U = y \to dU = dy$

$$dV = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{y}{\lambda}} \to V = -e^{-\frac{y}{\lambda}}$$

$$E(Y) = \left[\underbrace{-ye^{-\frac{y}{\lambda}}}_{=0} \right]_0^{+\alpha} + \int_0^{+\alpha} e^{-\frac{y}{\lambda}} dy = \left[-\lambda e^{-\frac{y}{\lambda}} \right]_0^{+\infty} = \lambda$$

$$\boxed{E(Y) = \lambda}$$

$$E(Y)^2 = \int_0^{+\infty} y2\frac{1}{\lambda}y \quad e^{-\frac{y}{\lambda}} dy$$

$U = y^2 \to dU = 2y\ dy$

$$dV = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{y}{\lambda}} \to V = -e^{-\frac{y}{\lambda}}$$

$$E(Y^2) = \left[-y e^{-\frac{y}{\lambda}} \right]_0^{+\infty} + 2\lambda \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda} y\ e^{-\frac{y}{\lambda}} dy$$

$$= 2\lambda E(Y) = 2\lambda^2 \to$$

$$\boxed{V(Y) = \lambda^2}$$

V . 15 :

1°) Conditions nécéssaires

a) $k \geq 0$.

b) $\int_0^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \frac{1}{k}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{\theta}}dx = \frac{1}{k}\left[-\theta e^{-\frac{x}{\theta}}\right]_0^{+\infty} \rightarrow$

$$\frac{\theta}{k} = 1 \rightarrow \quad \boxed{k = \theta}$$

2°) X admettant f pour densité de probabilité et F pour fonction de répartition.

$Y = \frac{X}{\theta} \rightarrow P[Y < y] = P[X < \theta y] = F(\theta y) \rightarrow$

$$G(y) = F(\theta y)$$

Avec G (y) est la fonction de réptition de la variable Y.

$$g(y) = G'(y) = \theta F_1'(\theta y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y \leq 0 \\ e^{-y} & \text{si} \quad y \geq 0 \end{cases}$$

Nous allons voir (Chapitre II Tome II) que g (y) définie ce qu'on appelle la densité de probabilité de la loi Guamma.

V. 16 :

Nous pouvons facilement vérifier que f (x) définie bien une densité de probabilité.

En effet :

$\int_{df} f(x)dx = \int_0^1 6x(1-x)dx = \left[3x^2 - 2x^3\right]_0^1 = 1$

$G(y)=P(Y \leq y)=P(2X+1 \leq y)=P(X \leq \frac{y-1}{2})=F(\frac{y-1}{2})$

Avec

F est la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

G est la fonction de répartition de la variable aléatoire Y.

$$g(y) = \frac{1}{2} f(\frac{y-1}{2}) = \frac{1}{2}\left[6(\frac{y-1}{2})(1-(\frac{y-1}{2})\right]$$

$$= 3\left[(\frac{y-1}{2})(\frac{2-y+1}{2})\right]$$

$$= \frac{3}{4}(y-1)(3-y)$$

La densité de probablité de la variable Y est définie par :

$$f(y) = \begin{cases} \frac{3}{4}(y-1)(3-y) & 0 < y < 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

V . 17 :

1°) La fonction de répartition de X s'écrit :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

2°) Nous avons :

$$G(y_1) = P(Y_1 \leq y_1) = P(\frac{1}{X} \leq y_1) = P(X \geq \frac{1}{y_1})$$

$$= 1 - P(X \leq \frac{1}{y_1}) = 1 - F(\frac{1}{y_1}).$$

avec G (y_1) est la fonction de repartition de la variable Y_1.

$$g(y_1) = \frac{1}{y_1^2} f(\frac{1}{y_1}) = \frac{1}{y_1^2} e^{\frac{1}{y_1}} \rightarrow$$

$$g(y_1) = \begin{cases} \dfrac{1}{y_1^2} e^{-\frac{1}{y_1}} & \text{si} \quad y_1 > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3°) $G(Y_2) = P(Y_2 \leq y_2) = P(2X \leq y_2) = P(X \leq \frac{y_2}{2})$

$$= F(\frac{y_2}{2}) \rightarrow$$

$$g(y_2) = \frac{1}{2} f(\frac{y_2}{2}) = \frac{1}{2} e^{-\frac{y_2}{2}}$$

$$g(y_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} e^{-\frac{y_2}{2}} & \text{si} \quad y_2 \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4°)

$\forall x \in [0, +\infty[\qquad Y_3 = e^X \in [1, +\infty[$

$G(y_3) = P(Y_3 \leq y_3) = P(e^X \leq y_3) = P(X \leq \text{Log}\, y_3) = F(\text{Log}\, y_3) \rightarrow$

$$g(y_2) = \frac{1}{2} f(\frac{y_2}{2}) = \frac{1}{2} e^{-\frac{y_2}{2}}$$

$$g(y_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} e^{-\frac{y_2}{2}} & \text{si} \quad y_2 \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4°)

$\forall x \in [0,+\infty[\quad ; \quad Y_3 = e^X \in [1,+\infty[.$

$G(y_3) = P(Y_3 \leq y_3) = P(e^X \leq y_3) = P(X \leq \text{Log}y_3) = F(\text{Log}y_3) \rightarrow$

$$g(y_3) = \frac{1}{y_3} f(\text{Log}y_3) = \frac{1}{y_3} e^{-\text{Log}y_3} = \frac{1}{y_3} e^{\text{Log}\frac{1}{y_3}} = \frac{1}{y_3^2} \quad \text{si} \quad y_3 > 1$$

$$g(y_3) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y_3 \leq 1 \\ \dfrac{1}{y_3^2} & \text{si} \quad y_3 > 1. \end{cases}$$

V . 18 :

Nous avons $Y = \varphi(x) = x^2 \quad -1 < x < 2$

La fonction $\varphi(x)$ n'est pas bijective sur $]-1,1[$ mais elle l'est sur $]1,2[$.

a) $0 \leq y < 1$; c'est à dire si $-1 < x < 1$

$G(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y)$

$= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y})$

$= 2F(\sqrt{y}) - 1$ (car $f(x) = \dfrac{1}{3}$ est symétrique par rapport à Oy sur l'intervalle $]-1,1[$).

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} f(\sqrt{y}) = \frac{1}{3\sqrt{y}}$$

b) $1 \leq y < 4$ c'est à dire si $1 < x < 2$

$G(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(X \leq \sqrt{y}) = F(\sqrt{y}) \rightarrow$

$$g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f(\sqrt{y}) = \frac{1}{6\sqrt{y}}$$

D'où :

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{3\sqrt{y}} & 0 \leq y < 1 \\ \dfrac{1}{6\sqrt{y}} & 0 \leq y < 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2°) Détermination de la fonction de répartition :

*si $y \leq 0 \rightarrow g(y) = 0 \rightarrow G(y) = 0$

*si $0 < y < 1 \rightarrow g(y) = \dfrac{1}{3\sqrt{y}} \rightarrow G(y) = \int_0^y f(t)dt = \dfrac{2\sqrt{y}}{3}$

*si $1 \leq y < 4$; $g(y) = \dfrac{1}{6\sqrt{y}} \rightarrow$

$$G(y) = \left[\frac{2\sqrt{y}}{3}\right]_0^1 + \int_1^y \frac{1}{6\sqrt{t}}dt = \frac{\sqrt{y}+1}{3}$$

*si $y \geq 4$; $G(y) = 1$

D'où :

$$G(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \dfrac{2\sqrt{y}}{3} & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ \dfrac{\sqrt{y}+1}{3} & \text{si } 1 \leq y < 4 \\ 1 & \text{si } y \geq 4 \end{cases}$$

V . 19 :

Comme X et Y sont indépendantes ; on peut appliquer directement le théorème :

$$g(z) = \int_0^z f(x).h(z-x)dx = \int_0^z e^{-x}e^{-(z-x)}dx = \int_0^z e^{-z}dx$$

$$= \left[xe^{-z}\right]_0^z = ze^{-z} \rightarrow$$

$$g(z) = \begin{cases} ze^{-z} & \text{si} \quad z > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

N.B : Nous pouvons aussi obtenir ce résultat ; en partant de la fonction de répartition de la variable Z. En effet :

$$G(z) = P(Z \leq z) = \int_0^z e^{-x}\left[\int_0^{z-x} e^{-y}dy\right]dx = \int_0^z e^{-x}(-e^{x-z}+1)dx$$

$$= \int_0^z (e^{-x} - e^{-z})dx = \left[-e^{-x} - xe^{-z}\right]_0^z = -e^{-z} - ze^{-z} + 1.$$

$$g(z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad z < 0 \\ -e^{-z} - ze^{-z} + 1 & \text{si} \quad z \geq 0. \end{cases}$$

$$g(z) = G'(Z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad Z < 0 \\ ze^{-z} & \text{si} \quad z \geq 0. \end{cases}$$

V . 20 :

1°) Calcul de a.

* $f(x) \geq 0 \rightarrow a > 0$

* $\int_{Df} f(x)dx = 1 \rightarrow \int_{-\infty}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx$

$+\int_2^{+\infty} f(x)dx = 1$

$$\rightarrow \left[\frac{-x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2a}\right]_{0}^{2} = 1 \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{2}{a} = 1 \rightarrow$$

$$\boxed{a = 4}$$

2°) Le lecteur vérifiera que tout intervalle contenu dans $]-\infty,-1[$ ou dans $[2,+\infty[$ a une probabilité nulle de contenir des réalisations de X.

3°) Détermination de la fonction de répartition :

*Si $x \in]-\infty,-1[;\quad f(x) = 0 \rightarrow F(x) = 0$

*Si $x \in [-1,0[;\quad f(x) = -x \rightarrow F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}$

*Si $x \in [0,2[;\quad f(x) = \frac{x}{4} \rightarrow F(x) = \int_{-1}^{0} (-t)dt + \int_{0}^{x} \frac{t}{4}dt$

$$= \frac{1}{2} + \frac{x^2}{8}$$

*Si $x \in [2,+\infty[\quad \rightarrow F(x) = 1$

En résumé :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1 \\ \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} & \text{si} \quad -1 \le x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x^2}{8} & \text{si} \quad 0 \le x < 2 \\ 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

c) A partir de la définition de la densité de probabilité f ; E (X) se trouve nécessairement dans l'intervalle $[-1.2] \rightarrow$

$$E(X) = \int_{-1}^{0} -x^2 dx + \int_{0}^{2} \frac{x^2}{4} dx = \frac{1}{3} \rightarrow$$

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{3}}$$

$$E(X^2) = \int_{-1}^{0} -x^3 dx + \int_{0}^{2} \frac{x^3}{4} dx = \frac{5}{4} \rightarrow$$

$$V(X) = \frac{5}{4} - \frac{1}{9} = \frac{41}{36} \rightarrow \quad \boxed{V(X) = \frac{41}{36}}$$

V. 21 :

1°) Calcul de K :

$$\int_{-K}^{0} (x+k)dx + \int_{0}^{K} (k-x) = \left[\frac{x^2}{2} + Kx\right]_{-K}^{0} + \left[Kx - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{K}$$

$$= \frac{K^2}{2} - K^2 + K^2 + \frac{K^2}{2} = 1 \rightarrow K^2 = 1$$

Comme K doit être positif : On prend $K = 1$

2°) Tout intervalle contenu dans $]-\infty,-1[$ ou dans $]1,+\infty[$ a une probabilité nulle de contenir des réalisations de X.

3°) Détermination de la fonction de répartition :

*Si $x < -1$ $f(x) = 0 \rightarrow F(x) = 0$

*Si $x \in [-1,0]$ $f(x) = x + 1 \rightarrow F(x) = \int_{-1}^{x} (t+1)dt$

$$\left[\frac{t^2}{2}+t\right]_{-1}^{x} = \frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}$$

$$\text{*Si } x \in [0,1] \rightarrow F(x) = \left[\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\right]_{-1}^{0} + \int_0^x (1-t)dt$$

$$= -\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}$$

*Si $x \in [1,+\infty[$ $\quad F(x) = 1$

En résumé :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1 \\ \dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x \in [-1,0] \\ -\dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

3°) E (X) = doit se trouver nécéssairement dans l'intervalle $[-1,1]$

$$E(X) = \int_{-1}^{0} (x^2+x)dx + \int_0^1 (x-x^2)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 0 \rightarrow \quad E(X) = 0$$

$$V(X) = E(X^2) = \int_{-1}^{0} (x^3 + x^2)dx + \int_{0}^{1} (x^2 - x^3)dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{6} \rightarrow \qquad V(x) = \frac{1}{6}$$

V. 22 :

1°)

$Y_1 = e^X \rightarrow Y_1(E) \in]0,+\infty[$

Soit $\quad y_1 > 0 \quad G(y_1) = P(Y < y_1) = P\left[e^X < y_1\right] = P(X < \text{Log}y_1)$

$$= F(\text{Log}y_1) = \frac{1}{1 + e^{-\text{Log}y_1}} = \frac{1}{1 + e^{\text{Log}\frac{1}{y_1}}} =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{y_1}} = \frac{y_1}{y_1 + 1}$$

Si $\quad y_1 \leq 0 \quad G(y_1) = 0$

D'où

$$G(y_1) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y_1 \leq 0 \\ \dfrac{y_1}{y_1 + 1} & \text{si} \quad y_1 > 0 \end{cases}$$

La densité de probabilité de la variable $Y = e^X$ est :

$$g(y_1) = G'(y_1) = \begin{cases} \dfrac{1}{(y_1 + 1)^2} & \text{si} \quad y_1 > 0 \\ 0 & \text{si} \quad y_1 \leq 0 \end{cases}$$

2°)

$$Y_2 = \frac{1}{1+e^{-X}} > 0 \qquad Y_2(E) \in \left]0,1\right[$$

$$G(y_2) = P(Y_2 < y_2) = P\left[\frac{1}{1+e^{-X}} < y_2\right] = P\left[1+e^{-X} > \frac{1}{y_2}\right]$$

$$= P\left[e^{-X} > \frac{1}{y_2} - 1\right] = P\left[-X > \mathrm{Log}\frac{1-y_2}{y_2}\right]$$

$$= P\left[X < -\mathrm{Log}\frac{1-y_2}{y_2}\right] = F(-\mathrm{Log}\frac{1-y_2}{y_2})$$

$$= \frac{1}{1+e^{+\mathrm{Log}(\frac{1-y_2}{y_2})}} = \frac{1}{1+\frac{1-y2}{y2}} = y_2$$

D'où

$$G(y_2) = \begin{cases} y_2 & \text{si} \quad 0 < y_2 < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$g(y_2) = \begin{cases} 1 & 0 \le y_2 \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Y_2 suit une loi appelée loi uniforme sur $[0,1]$.

TABLES DES MATIERES

NOS PLUS RECENTES PARUTIONS

- ☞ Manuel de Mathématiques Financières
- ☞ L'Imposition des Bénéfices des Personnes Morales
- ☞ Précis de Recouvremment des Créances
- ☞ Dictionnaire du Droit et de la Comptabilité des Sociétés Tunisiennes
- ☞ مدخل إلى العلاقات العامة
- ☞ Dictionnaire de la Douane

Consultez aussi

Fiscalité

Codes :

- Code de l'**I**mpôt (enrichi d'annexes et de la charte du contribuable)
- Code de la **T.V.A** enrichi de
  - textes d'applications
  - Dispositions non codifiés
- Code du **D**roit d'**E**nregistrement
- Code des incitations **d'I**nvestissement et ses **T**extes d'**A**pplications
- **R**ecueil des **D**roits, **T**axes et **C**ontributions Indirectes

Autres :

- **D**ictionnaire de la **F**iscalité **T**unisienne
- La **T.V.A** en matière de commerce de gros et de détail (Bilingue)

Gestion

- Diagnostic de l'Entreprise "Manuel pratique"
  Noureddine bel haj Hamouda
- مبادئ الإدارة و التنظيم
  جمال الدين العويسات
- Dictionnaire de la **B**ourse et du Marché Financier Tunisien

☞ **G**estion des **R**essources **H**umaines
de Mme. Zeineb Mamlouk

☞ **M**anagement sans **D**ouleurs
du Professeur Mourad Ben Turkia

☞ **المختصر الشامل لتقنيات القروض البنكية وعمليات الخصم**

لخير الدين الآجري

Economie

☞ Théorie de la **M**acroéconomie et du **Développement** :
du professeur khaled ELMANOUBI

☞ Tome 1 : **D**eveloppement

☞ Tome 2 : **M**acro **E**conomie

☞ **مدخل إلى علم الإقتصاد** ☜

الدكتور لعويسات جمال الدين

Comptabilité

☞ **P**lan **C**omptable **G**énéral **T**unisien
Commenté et mis à jour (2ème édition)

* Version Détaillée
* Version Nomenclature

☞ **E**xercices **C**orrigés de **C**omptabilité
Générale (3ème édition, actualisée)
de Salem Ben Brahim et Béchir Mayoufi

☞ **C**omptabilité de Base
(Edition enrichie d'exercices corrigés et des normes comptables tunisiennes)
de Ali Nefzaoui

☞ **C**omptabilité des **S**ociétés
de Ali Nefzaoui

☞ **C**omptabilité des **D**roits **I**mpôts et **T**axes
de Ali Nefzaoui

☞ **T**ables **F**inancières **T**rilingues
(arabe, français, anglais)

Droit

A. Législation du Travail :

☞ La **G**estion des **R**essources **H**umaines

☞ **التشريع التونسي للشغل في أربع أجزاء**

محمد الهادي بن عبد الله

ج1 : مجلة الشغل معلق عليها (طبعة الثانية)

ج2 : التكوين المهني والتشغيل

ج3 : علاقات الشغل

ج4 : ظروف العمل والصحة والسلامة المهنية

☞ **في تطبيق قانون الشغل**

ليونس الغنجاتي

☞ Le Service Social de l'Entreprise
de Mohamed El Hedi Ben Abdallah

☞ Code du Travail (Arabe & Français)
(à jour)

B. Autres

☞ **مساعدو القضاء في تونس**

محمد الهادي بن عبد الله

☞ Les Auxiliaires de Justice
Mohamed El Hedi Ben Abdallah

☞ Précis de Recouvrement des Créances
Me. K. Lejri et Me. N. Bourounia

☞ **مجلة الحقوق العينية**

☞ **مصنف فقه القضاء التجاري التونسي**

لمحمد الهادي بن عبد الله

Divers

☞ Manage With English : L'anglais des affaires
(en Englais)
de Margareta Alouane et Annick Slim

☞ Apprendre à Programmer en **BASIC**
de Jameleddine Tazarki

☞ Apprendre à Programmer en **Turbo PASCAL**
de Jameleddine Tazarki

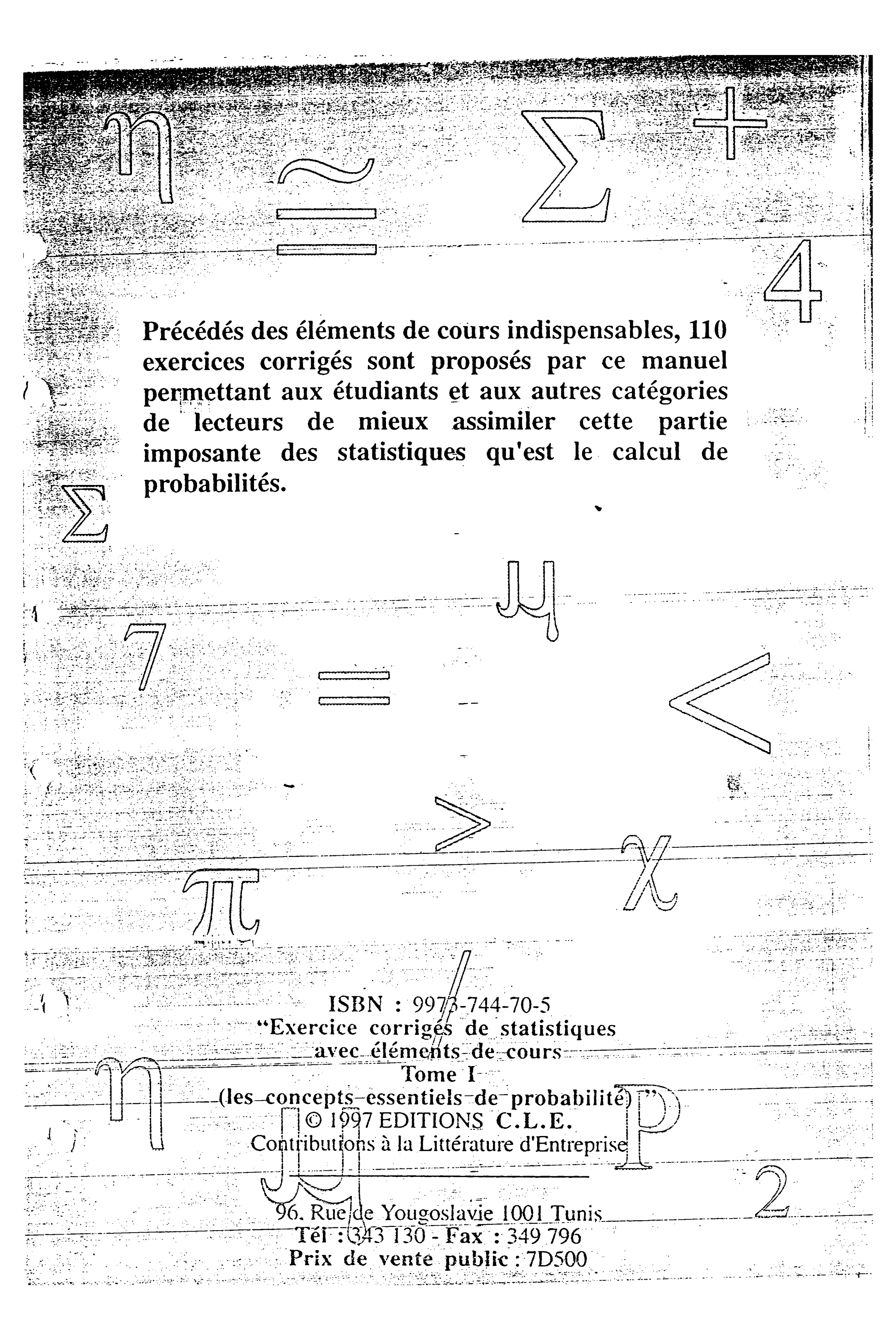
☞ Méthodologie de Recherche en Sciences Sociales
Mme. Riadh Zghal

☞ **البحوث والرسائل الجامعية**

للدكتور محمد العزيز نجاحي

☞ مدخل إلى العلاقات العامة دليل الطالب والمؤسسة

حميس الشايب



Précédés des éléments de cours indispensables, 110 exercices corrigés sont proposés par ce manuel permettant aux étudiants et aux autres catégories de lecteurs de mieux assimiler cette partie imposante des statistiques qu'est le calcul de probabilités.

ISBN : 9973-744-70-5
"Exercice corrigés de statistiques
avec éléments de cours
Tome I
(les concepts essentiels de probabilité)"

Contributions à la Littérature d'Entreprise

96, Rue de Yougoslavie 1001 Tunis
Tél : 343 130 - **Fax :** 349 796
Prix de vente public : 7D500